

Úloha V.V ... KombinaDORTika

7 bodů; průměr 5,49; řešilo 67 studentů

Monča s Anežkou šly do své oblíbené cukrárny slavit úspěšný konec semestru a koupily si dohromady 8 různých zákusků.

1. Anežka má však intoleranci na laktózu, a proto si může vzít jen některé z dortů. Kolika způsoby si mohou zákusky rozdělit, pokud jsou právě 4 dorty bezlaktózové a každá z nich chce dostat alespoň jeden dortík?
2. Jaký by byl počet způsobů, kdyby se Anežka o každý dort s laktózou, který by na ni připadl, rozděli s Lukášem a rozdělení dortů by tak nebylo závislé na obsahu laktózy?
3. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 8 různými náhodně koupenými zákusky bude alespoň jeden bezlaktózový? A jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude právě polovina bezlaktózových? Pravděpodobnost, že si vyberou dort s laktózou, je stejná jako pravděpodobnost, že si vyberou dort bez laktózy.

1. První podúlohu si rozdělíme na několik případů, které mohou nastat. V prvním (nejjednodušším) dostane Monča i Anežka každá právě 4 dorty. Anežka si tedy vybírá 4 bezlaktózové dorty ze čtyř bezlaktózových dortů, což jí dává jen $\binom{4}{4} = 1$ možnost výběru. Tento případ může nastat pouze jednou, protože nás nezajímá pořadí, ve kterém dortíky Anežka nebo Monča dostanou.

V této úloze je však trochu chyták, že Anežka může dostávat pouze bezlaktózové dorty, zatímco Monča si může vybrat ze všech. Proto v dalších případech můžou Anežce dortíky pouze ubývat, kdežto Monča jich bude mít čím dál tím více.

V dalších případech má tedy Anežka pouze 3, 2 nebo 1 dortík a Monči zůstane zbytek. Spočítáme, kolika možnými způsoby si Anežka může z bezlaktózových zákusků vybrat právě tyto počty dortíků. Jak již bylo zmíněno, nezáleží na pořadí – jedná se tedy o kombinace (bez opakování). V prvním případě, když má Anežka 3 zákusky, je to kombinační číslo $\binom{4}{3} = 4$. Pro pouze 2 zákusky je to $\binom{4}{2} = 6$ a pro poslední možnost – jeden zákusek – $\binom{4}{1} = 4$. Možnost, kdy Anežka nedostane žádný dortík neuvažujeme. Všechny možnosti sečteme a dostaneme

$$\binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{4}{1} = 1 + 4 + 6 + 4 = 15.$$

Děvčata si dortíky mohou rozdělit patnácti různými způsoby.

2. Při řešení druhé úlohy se na problém podíváme „z pohledu zákusků“. Vzhledem k tomu, že již nemáme žádná omezení na obsah laktózy, každý dortík si se stejnou pravděpodobností vezme Monča nebo Anežka. Volba dortíku není nijak závislá na volbě ostatních dortíků. Můžeme tedy postupovat podle pravidla součinů, kdy má první dortík 2 možnosti, komu může připadnout (Anežce, nebo Monče), a pro každou z jeho „voleb“ existují pro další dortík opět 2 možnosti. Takto se možností větví až do posledního 8. dortíku. Máme tedy 2^8 možností.

Ještě je však potřeba vzít v potaz, že obě chtějí dostat alespoň jeden dortík. Odečteme tedy situace, kdy Anežka nebo Monča dostane všechny dortíky. Tyto situace jsou právě 2 (jedna pro Anežku a jedna pro Monču), výsledný počet možností je tedy $2^8 - 2 = 254$.

3. V posledním úkolu pomocí binomického rozdělení spočítáme pravděpodobnost toho, že si Anežka s Mončou koupí určitý počet bezlaktózových dortíků. V první části máme podmínku, že mezi koupenými dortíky musí být alespoň jeden bezlaktózový. Znamená to tedy, že vyhovují všechny situace, kdy máme jeden a více dortíků bez laktózy.

Ke zjištění počtu těchto situací použijeme pravidlo rozdílu. Pravděpodobnost splnění nějaké podmínky vypočítáme rozdílem 1 a pravděpodobnosti, že splněna nebude. V našem případě nebude podmínka splněna, pokud budeme mít všechny dortíky s laktózou. Pravděpodobnost výběru laktózového dortíku je $p = 50\% = 0,5$ (stejně pro bezlaktózový). Pravděpodobnost, že koupí všechny dortíky s laktózou, je tedy

$$P = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{8}{8} \cdot 0,5^8 \cdot 0,5^0 = 0,39\%.$$

Tuto pravděpodobnost tedy ještě odečteme od 1 a vidíme, že situace vypadá pro Anežku velice příznivě, neboť pravděpodobnost toho, že koupí alespoň jeden bezlaktózový dort, je 99,6 %.

V druhé části již postup pouze replikujeme, ovšem teď už bez pravidla rozdílu. Potřebujeme zjistit pravděpodobnost situace, kdy budeme mít přesně polovinu dortíků s laktózou a polovinu bez ní. To odpovídá situaci, kdy budeme mít $n = 8$ dortíků, z nichž $k = 4$ bez laktózy. Pravděpodobnost, že nastane taková situace, je

$$P = \binom{8}{4} \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^4 = 27,3\%.$$

Ideální situace, kdy bude počet bezlaktózových a normálních dortíků stejný, nastane s pravděpodobností 27,3 %.

Monika Drexlerová
monika.drexlerova@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.