

Úloha V.5 ... (Ne)Vylité kafe

8 bodů; průměr 5,91; řešilo 56 studentů

Verča s Pétou se jeli projet autem a právě projíždí kruhovou dráhu s poloměrem $R = 400$ m. Silnice je však nakloněna o 35° vůči rovině (vnitřní oblouk silnice je níže než vnější). Verča má uvnitř auta $V = 450$ ml výběrové kávy v kelímku ve tvaru válce o poloměru $r = 4$ cm a s výškou $h = 10$ cm. Nádoba je pevně uchycena k interiéru auta. Jaká je nejmenší a největší rychlost, kterou můžou Verča s Pétou po okruhu jet, aby se kafe nevytlilo?

Na kávu v kelímku působí v průběhu jízdy z pohledu vnitřku auta dva různé typy zrychlení, tíhové a odstředivé. Tíhové zrychlení je dáno silovým působením Země a odpovídá $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, odstředivé zrychlení vypočítáme jako

$$a_o = \frac{v^2}{R},$$

kde v je rychlost pohybu auta a R poloměr dráhy.

Nejprve ale potřebujeme zjistit, jak moc se může hladina kávy naklonit vůči kelímku. Víme, že kelínek má tvar válce s poloměrem $r = 4$ cm, výškou $h = 10$ cm a je v něm $V = 450$ ml kávy. Z těchto hodnot dokážeme spočítat, kolik místa je v kelímku nad hladinou, a tím i maximální výšku, o kterou se může hladina kávy na jedné straně kelímku zvednout

$$\Delta h = h - \frac{V}{\pi r^2}.$$

Ve vzorci jsme jen odečetli od výšky kelímku výšku, do které káva dosahuje za normálních podmínek¹ (to jsme odvodili ze vzorce pro objem válce $V = \pi r^2 h$).

Nyní potřebujeme vyjádřit, jaký by byl úhel hladiny vůči dnu kelímku α v situaci, kdy se káva na jedné straně zvedne o výšku Δh . To zjistíme pomocí funkce arkus tangens

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\Delta h}{r}\right) = \arctg\left(\frac{h}{r} - \frac{V}{\pi r^3}\right).$$

Zde si Δh můžeme představit jako protilehlou stranu a poloměr kelímku pak představuje stranu přilehlou²

Samotná dráha, po které auto jede, má sklon 35° . S vyšší rychlostí se odstředivé zrychlení zvětšuje. Úhel hladiny kávy vůči zemi tedy bude při nejvyšší „bezpečné“ rychlosti $35^\circ + \alpha$, pro nejnižší rychlost to pak bude $35^\circ - \alpha$.

K vyjádření poměru mezi velikostmi g a a_o znovu použijeme funkci tangens. Protilehlá strana je v našem případě tíhové zrychlení g a přilehlá je odstředivé zrychlení a_o . Tento poměr se musí rovnat tangens maximálního/minimálního úhlu. Dostaneme tedy rovnosti

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(35^\circ \pm \alpha) &= \frac{a_o}{g}, \\ \operatorname{tg}\left(35^\circ \pm \arctg\left(\frac{h}{r} - \frac{V}{\pi r^3}\right)\right) &= \frac{v^2}{gR}. \end{aligned}$$

Teď už nezbyvá nic jiného než vyjádřit ze vztahu rychlost v

$$v = \sqrt{\operatorname{tg}\left(35^\circ \pm \arctg\left(\frac{h}{r} - \frac{V}{\pi r^3}\right)\right) gR}.$$

¹Normálními podmínkami máme na mysli stav, kdy je hladina kávy v kelímku rovnoběžná se dnem.

²Je nutné také dokázat, že hladina bude skutečně rovná plocha i po naklopení, abychom mohli pro výpočet použít pravoúhlý trojúhelník. Pokud na všechna místa v kapalině působí síla o stejné velikosti a směru (což je v našem případě splněno), tak je intuitivně hladina kávy rovná.

Po dosazení nám vyjde nejvyšší rychlost $v_{\max} \doteq 67,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 244,4 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ a nejnižší $v_{\min} \doteq 38,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 137,4 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Když tedy auto pojede libovolnou rychlostí mezi $140 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ a $240 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, káva se z kelímku nevylije.

Max Menčík

max.mencik@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.