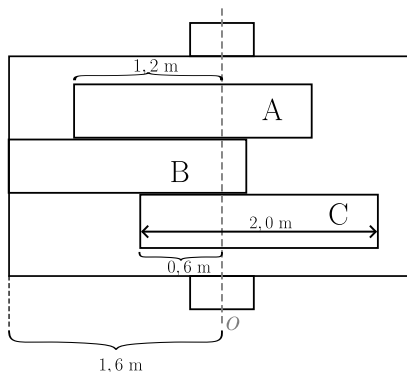


Úloha V.1 ... Dřevorubecká

5 bodů; průměr 4,69; řešilo 39 studentů

Adam s Michalem vozili na dvoukolovém vozíku z lesa pokácené klády dřeva. Na vozík naložili tři homogenní klády o stejných délkách a hmotnostech tak, jak je vidět na obrázku 1. Jelikož ale nedbale každou kládu položili do náhodné pozice, vozík se jim neustále převažoval. Aby tomu zamezili, chtěli celý vozík uvést do rovnovážné polohy (tzn. společné těžiště klád přesunout nad osu rotace kol). O jakou vzdálenost a jakým směrem mají posunout kládu označenou písmenem A, aby této rovnováhy dosáhli? Předpokládejte, že těžiště vozíku se nachází nad osou rotace kol a že kláda A leží po posunutí stále rovnoběžně s kládami B a C.

Obrázek 1: Znázornění vozíku s různě posunutými kládami vůči ose otáčení kol O

Jak je již zmíněno v zadání, aby se vozík nepřevrátil, musí společné těžiště klád ve vozíku ležet nad osou otáčení kol O . V obecném případě lze polohu těžiště více těles vypočítat jako vážený průměr poloh těžišť jednotlivých těles, kde váhami jsou hmotnosti těles. V našem případě jsou všechny klády na vozíku stejně těžké, takže nám k získání polohy společného těžiště klád stačí vypočítat aritmetický průměr poloh těžišť jednotlivých klád. Matematicky to lze zapsat následovně

$$x_T = \frac{M \cdot x_A + M \cdot x_B + M \cdot x_C}{M + M + M} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad (1)$$

kde x_T je poloha společného těžiště klád, x_A , x_B a x_C jsou polohy těžišť jednotlivých klád a M je hmotnost jedné klády.

Pro další počítání si zavedeme souřadnicový systém s osou x (osa, na které měříme polohu těžiště) kolmou na osu otáčení kol O , tak aby v místě, kde protíná osu otáčení kol O bylo $x = 0$ a hodnoty (souřadnice těžišť) stoupaly směrem doprava.¹ Dále si musíme v této soustavě souřadnic vyjádřit polohy těžišť jednotlivých klád (x_A , x_B , x_C) a požadovanou polohu jejich společného těžiště x_T .

Vyjádření požadované polohy společného těžiště klád je nejjednodušší – podle definice naší soustavy souřadnic je rovna $x_T = 0$, protože chceme, aby společné těžiště klád leželo nad osou otáčení kol O . Z obrázku ze zadání je patrné, že kláda A je oproti naší soustavě souřadnic

¹Osa otáčení kol O zároveň představuje osu y naší soustavy souřadnic. Tou se ale při řešení této úlohy nemusíme zabývat, protože nás zajímá pouze poloha těžiště klád ve směru osy x .

posunutá o 1,2 m doleva, tedy její levý konec má souřadnici $x'_A = -1,2$ m. Stejný způsobem jsme z obrázku schopni určit i souřadnice levých konců klád B a C . Získáme tak

$$x'_A = -1,2 \text{ m},$$

$$x'_B = -1,6 \text{ m},$$

$$x'_C = -0,6 \text{ m}.$$

Protože jsou klády homogenní, nachází se těžiště v polovině délky klády tj. 1 m od jejího levého konce. Polohu těžišť jednotlivých klád tak jednoduše určíme přičtením hodnoty 1 m k souřadnicím levých konců klád. Známe tedy následující souřadnice těžišť klád na obrázku ze zadání

$$x_T = 0 \text{ m},$$

$$x_A = x'_A + 1 \text{ m} = -1,2 \text{ m} + 1 \text{ m} = -0,2 \text{ m},$$

$$x_B = x'_B + 1 \text{ m} = -1,6 \text{ m} + 1 \text{ m} = -0,6 \text{ m},$$

$$x_C = x'_C + 1 \text{ m} = -0,6 \text{ m} + 1 \text{ m} = 0,4 \text{ m}.$$

Ze vztahu (1) si vyjádříme, kam je potřeba těžiště klády A umístit, jako

$$x_A = 3 \cdot x_T - x_B - x_C.$$

Po dosazení známých hodnot x_T , x_B a x_C dostaneme

$$x_A = 3 \cdot 0 \text{ m} - (-0,6 \text{ m}) - 0,4 \text{ m} = 0,2 \text{ m}.$$

O jakou vzdálenost musí Adam s Michalem kládu A posunout vypočítáme jednoduše jako rozdíl původní a nové polohy těžiště klády A

$$\Delta x_A = 0,2 \text{ m} - (-0,2 \text{ m}) = 0,4 \text{ m}.$$

Aby se vozík nepřevracel, musí Adam s Michalem posunout kládu A o 0,4 m směrem doprava.

K výsledku se můžeme dostat i prostou úvahou. Pokud chceme, aby se vozík nepřevracel, tak součet vychýlení klád od (požadovaného) těžiště na jednu stranu se musí rovnat součtu vychýlení na stranu druhou. Konkrétně to znamená, že když je kláda C odchýlená o 0,4 m doprava a kláda B o 0,6 m doleva, potřebujeme, aby kláda A byla vychýlená o 0,2 m doprava a pomohla tak kládě C vyvážit kládu B . Jestliže je ale podle obrázku kláda A vychýlená o 0,2 m doleva, musíme ji posunout o 0,4 m doprava, abychom dosáhli rovnovážné polohy.

Vojtěch Kubrycht

vojtech.kubrycht@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.