

Úloha III.V ... Potápěčská

7 bodů; průměr 5,04; řešilo 78 studentů

Výfuček si chtěl vyzkoušet potápění v moři. Celý nadšený se pustil do připravování výstroje. Rád by si ale svůj ponor pořádně naplánoval a propočítal, aby nedošlo k problémům a on se mohl zcela uvolnit při sledování podmořského života.

1. UVědomil si, že kvůli místu, ve kterém se chce potápět, stráví téměř celý svůj ponor v konstantní hloubce $h = 15$ m. Na ponor má Výfuček k dispozici jednu 12l láhev naplněnou vzduchem o počátečním tlaku $p_p = 190$ bar. Dále si také změřil, že jeho spotřeba vzduchu na hladině při lehké fyzické námaze je $Q = 30\text{ l}\cdot\text{min}^{-1}$. Pomozte Výfučkovi spočítat, kolik času před zahájením výstupu může pod hladinou strávit, pokud si na bezpečný výstup chce v lahvi nechat tlak $p_r = 70$ bar.
2. Další věcí, na kterou musí Výfuček před ponorem myslet, je závaží, konkrétně jak těžké bude potřebovat. Výfuček si vzpomněl, že když se naposledy potápěl ve svém oblíbeném sladkovodním jezeře s hustotou vody $\rho_1 = 997\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, stačilo mu pro správné vyvážení mít na opasku $m_o = 3,0$ kg olova. Jelikož se Výfuček tentokrát chystá potápět ve slané vodě s hustotou $\rho_2 = 1\,025\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, bude tato hmotnost odlišná. Určete, kolik kg závaží bude muset na opasek přidat nebo kolik bude muset z opasku odebrat, aby byl vyvážený ve slané vodě. Uvažujte, že Výfuček váží $m_v = 40,0$ kg. Hustota olova činí přibližně $\rho_o = 11\,300\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

1. Množství vzduchu, které Výfuček bude mít k dispozici na hladině, vypočítáme pomocí Boyle-Marriotova zákona. Protože si Výfuček chce na výstup nechat rezervu $p_r = 70$ bar, nebudeme ji započítávat do počátečního tlaku p_p . Celkový objem vzduchu¹, který bude mít Výfuček k dispozici na ponor a pobyt pod hladinou, bude

$$V_c = V_1 \frac{p_p - p_r}{p_a} = 12 \cdot \frac{190 - 70}{1} \text{ l} = 1\,440 \text{ l},$$

kde V_1 je objem lahve a p_a je tlak na hladině vody, tedy atmosferický tlak (1 bar).

Jak víme, vzduch, který dýcháme, musí mít stejný tlak jako okolí. Když se tedy ponoříme do hloubky $h = 15$ m, okolní tlak se zvýší z 1 baru na 2,5 bar, protože tlak se zvyšuje o cca 1 bar každých 10 m vodního sloupce. Naše spotřeba vzduchu z daného objemu V_c se tedy navýší zhruba 2,5krát, čili bude

$$Q_c = 2,5Q = 75\text{ l}\cdot\text{min}^{-1}.$$

Pokud se Výfuček chce potápět do hloubky $h = 15$ m, kde má spotřebu vzduchu $Q_c = 75\text{ l}\cdot\text{min}^{-1}$ a má k dispozici $V_c = 1\,440$ l, bude moci být pod vodou před zahájením svého výstupu

$$t = \frac{1\,440}{75} \text{ min} \doteq 19 \text{ min}.$$

¹Vzduch přepočítáváme na objem o tlaku 1 bar pro následné zjednodušení výpočtu spotřeby.

2. Aby byl Výfuček správně vyvážený, musí se rovnat vztlaková a tíhová síla, které na něj působí. Obě tyto síly budu působit jak na Výfučka samotného, tak i na jeho závaží – olovo, které má na opasku. Platí tedy

$$(m_v + m_o)g = (V_v + V_o)\rho_1 g,$$

kde V_v , resp. V_o je objem Výfučka, resp. olova, které má na svém opasku ve sladké vodě, o hustotě ρ_1 .

Pokrácením tíhového zrychlení g získáme náležitý tvar

$$m_v + m_o = (V_v + V_o)\rho_1.$$

Pokud Výfuček chce být dobře vyvážen i ve slané vodě, musí platit stejná rovnost

$$m_v + m'_o = (V_v + V'_o)\rho_2,$$

kde m'_o , resp. V'_o je hmotnost, resp. objem olova, které musí Výfuček na svém opasku mít ve slané vodě o hustotě ρ_2 .

Zajímá-li nás rozdíl hmotností m'_o a m_o , musíme si je z předchozích vztahů vyjádřit. Za tímto účelem vyjádříme objemy V'_o a V_o jako podíl příslušné hmotnosti a hustoty olova ρ_o .

$$m_v + m_o = \left(V_v + \frac{m_o}{\rho_o} \right) \rho_1$$

$$m_v + m'_o = \left(V_v + \frac{m'_o}{\rho_o} \right) \rho_2$$

Několika úpravami si vyjádříme Výfučkem použité hmotnosti olova v obou prostředích.

$$m_o = \frac{V_v \rho_1 - m_v}{1 - \frac{\rho_1}{\rho_o}}$$

$$m'_o = \frac{V_v \rho_2 - m_v}{1 - \frac{\rho_2}{\rho_o}}$$

Z první rovnice si vyjádříme Výfučkův objem V_v jako

$$V_v = \frac{m_v + m_o}{\rho_1} - \frac{m_o}{\rho_o}.$$

Toto vyjádření dosadíme do druhé rovnice a výsledek upravíme.

$$m'_o = \frac{m_v \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) + m_o \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho_2}{\rho_o} \right)}{1 - \frac{\rho_2}{\rho_o}}$$

Nyní od hmotnosti m'_o odečteme hmotnost m_o .

$$m'_o - m_o = \frac{m_v \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) + m_o \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho_2}{\rho_o} \right)}{1 - \frac{\rho_2}{\rho_o}} - \frac{m_o \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_o} \right)}{1 - \frac{\rho_2}{\rho_o}}$$

$$m'_o - m_o = \frac{m_v \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) + m_o \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho_2}{\rho_o} + \frac{\rho_2}{\rho_o} - 1 \right)}{1 - \frac{\rho_2}{\rho_o}} = \frac{(m_o + m_v) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right)}{1 - \frac{\rho_2}{\rho_o}}$$

Nyní už nám zbývá jen dosadit číselné hodnoty jednotlivých veličin ze zadání.

$$m'_o - m_o = \frac{(3,0 \text{ kg} + 40,0 \text{ kg}) \left(\frac{1\,025 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}{997 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} - 1 \right)}{1 - \frac{1\,025 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}{11\,300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}} \doteq 1,3 \text{ kg}$$

Vidíme, že nám vyšla kladná hodnota. Hmotnost olova, kterou musí Výfuček použít ve slané vodě m'_o je tedy větší než hmotnost olova, které mu stačilo ve vodě sladké. Výfuček si tak na svůj opasek musí přidat 1,3 kg olova navíc, aby byl při potápění ve slané vodě správně vyvážený.

Alena Mouchová
alena.mouchova@vyfuk.org

Vojtěch Kubrycht
vojtech.kubrycht@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.