

Úloha II.5 ... Zalévání zahrady

8 bodů; průměr 7,00; řešilo 102 studentů

Jarda se rozhodl pokropit hadicí svou zahrádku. Proudem vody ale dosáhne maximálně do vzdálenosti $d = 12$ m.

1. Pod jakým úhlem vůči zemi (tzv. elevačním) Jarda drží hadici, stříká-li právě do oné maximální vzdálenosti $d = 12$ m? Jakou rychlostí opouští voda konec hadice?
2. Aby Jarda zvýšil rychlost vody, zmáčknul ústí hadice, které mělo původně kruhový průřez o poloměru $r = 1,0$ cm, do elipsovitého tvaru o poloosách $a = 1,4$ cm a $b = 0,5$ cm. Kolikrát rychleji začala voda z hadice proudit?
3. Do jaké vzdálenosti nyní Jarda dostříkne?

Při počítání zanedbejte odpor vzduchu a uvažujte, že ústí hadice se nachází přibližně ve stejné výšce jako záhony, které Jarda kropí.

1. Proud vody tryskající z hadice si lze představit jako soustavu několika kapiček, které jsou vrhány rychlostí v pod úhlem α . Takový vrh můžeme modelovat tzv. *šikmým vrhem*¹, pro který známe vztah pro vzdálenost, do níž kapky doletí.

$$d = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (1)$$

Z této rovnice můžeme vyčíst několik zajímavostí. Zaprvé, vzdálenost d závisí přímo úměrně na funkci $\sin 2\alpha$. Chceme-li tedy maximalizovat tuto vzdálenost, musíme se ptát, pro který úhel α je hodnota výrazu $\sin 2\alpha$ největší. Obecně goniometrická funkce $\sin x$ kolísá mezi hodnotami -1 a 1 a má své maximum v bodě $x = 90^\circ$ (pokud se zabýváme pouze úhly od 0° do 360°). Vzhledem k tomu, že v našem případě x odpovídá 2α , je funkce $\sin 2\alpha$ a tedy i vzdálenost d maximální pro elevační úhel $\alpha = 45^\circ$. Na celou závislost vzdálenosti dopadu d na elevačním úhlu α se můžete podívat na obrázku 1.

Pokud známe elevační úhel ($\alpha = 45^\circ$), vzdálenost doletu kapek vody ($d = 12$ m) a tíhové zrychlení ($g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$), dokážeme z rovnice (1) zjistit rychlost výtoku vody v_1 .

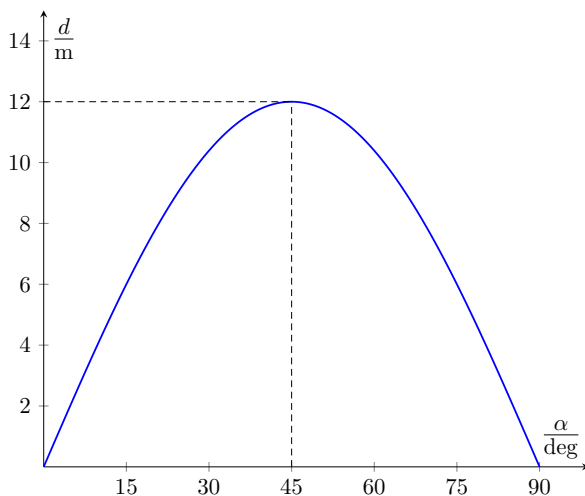
$$v_1 = \sqrt{\frac{gd}{\sin 2\alpha}} \doteq 11 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Rychlost výtrysku vody z hadice je tedy přibližně $11 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2. Při zúžení konce hadice se změní obsah jeho průřezu z původního S_1 na nový obsah S_2 . Díky tomu se určitým způsobem změní i rychlost výtoku. Abychom zjistili, kolikrát se rychlost výtoku změní, použijeme veličinu zvanou objemový průtok, která je definována jako součin obsahu průřezu a rychlosti toku určitým průřezem, $Q = Sv$. Říká nám, kolik vody proteče hadicí za určitý čas. Toto množství se v průběhu nemění, jelikož do hadice je voda vháněna pořád stejně rychle. Musí tedy platit $Q_1 = Q_2$, čili

$$S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

¹Pokud ještě nemáte mechaniku vrhů tolik osvojenou, doporučujeme si přečíst toto Výfučení https://vyfuk.org/_media/ulohy/r9/vyfučení/serial3.pdf.



Obrázek 1: Závislost vzdálenosti doletu na elevačním úhlu

z čehož lze určit poměr p rychlostí proudu po a před zúžením jako

$$p = \frac{v_2}{v_1} = \frac{S_1}{S_2}.$$

Teď už stačí určit, čemu je rovno S_1 a S_2 . Víme, že nejprve má konec hadice tvar kruhu, jehož obsah spočteme jako $S_1 = \pi r^2$. V druhém případě má hadice elipsovité průřez, jehož obsah lze určit pomocí poloos elipsy a a b jako $S_2 = \pi ab$. Poměr rychlostí tak bude

$$p = \frac{\pi r^2}{\pi ab} = \frac{r^2}{ab} \doteq 1,4.$$

Voda po zúžení konce hadice stříká 1,4krát rychleji.

3. Zjistili jsme, že nová rychlost, kterou má voda po vystříknutí z hadice, je $v_2 = pv_1$. K vypočtení nové vzdálenosti dostřiku vody d_2 můžeme použít opět vzorec (1).

$$d_2 = \frac{v_2^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(pv_1)^2 \sin 2\alpha}{g} = p^2 \frac{v_1^2 \sin 2\alpha}{g} = p^2 d \doteq 24 \text{ m}$$

Jarda po zmáčknutí hadice dosáhne proudem vody až do vzdálenosti 24 m.

Michal Stroff

michal.stroff@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.