

Úloha I.5 ... Čepování beze ztrát

8 bodů; průměr 4,64; řešilo 145 studentů

Vojta si chtěl natočit vodu z kohoutku. Všiml si však, že průměr kohoutku je dvakrát větší než průměr hrdla jeho lahve. Jelikož nechce plýtvat vodou, vymyslel elegantní způsob, jak do lahve napustit vodu beze ztrát. Umístil lahev do výšky h pod kohoutek a pustil vodu. Proud vody se při pádu zúžil a perfektně beze zbytku se napasoval do hrdla lahve.



1. Kolikrát menší je obsah průřezu hrdla lahve než obsah průřezu kohoutku?
2. Vojta jako znalý technik ví, že z kohoutku vytéká voda rychlostí v svisle dolů. Vyjádřete v násobcích této rychlosti rychlost, kterou voda padá do hrdla lahve.
3. Stejně jako Vojta určete a obecně vyjádřete pomocí rychlosti v a tíhového zrychlení g výšku h , ve které se nacházel kohoutek nad hrdlem lahve.

Uvažujte, že se proud vody zužuje osově symetricky a nevznikají v něm žádné bublinky či mezery.

1. Průměr kohoutku d_k je dvakrát větší než průměr hrdla lahve d_l , tedy $d_k = 2d_l$. Obsah průřezu kohoutku S_k je tedy čtyřikrát větší než obsah průřezu hrdla lahve (velikost plochy otvoru v láhvi) S_l , protože plocha kruhu se mění s druhou mocninou průměru.

$$\frac{S_k}{S_l} = \frac{\pi (d_k/2)^2}{\pi (d_l/2)^2} \Rightarrow \frac{S_k}{S_l} = \left(\frac{d_k}{d_l}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_k}{S_l} = \left(\frac{2 \cdot d_l}{d_l}\right)^2 = 2^2 = 4$$

2. K vyjádření rychlosti využijeme vlastnosti ustáleného proudění, při kterém zůstává konstantní tzv. *objemový průtok*.

Proud vody vytéká z kohoutku a následně volně padá, mění se jeho rychlost a také průřez v závislosti na výšce. Pro ustálené proudění platí, že kolik vody vyteče z kohoutku za daný čas, tolik vody musí za ten stejný čas například dopadnout do lahve, jinými slovy objemový průtok je v každé výšce stejný. Objemový průtok lze vyjádřit jako součin obsahu průřezu dané části proudu a rychlosti vody v tomto místě proudu, $Q = Sv$. Navazující tvrzení, že je tento součin všude konstantní, bývá nazýváno jako *rovnice kontinuity*.

$$Q = Sv = \text{konst}$$

Pokud dojde ke zmenšení průřezu proudu vody, musí se rychlost vody zvýšit, aby se zachoval konstantní objemový tok. Z předchozí podúlohy jsem zjistili, že průřez hrdla lahve je čtyřikrát menší než průřez kohoutku

$$S_l = \frac{1}{4} S_k.$$

Jelikož je objemový tok všude stejný, musí platit, že $S_k v = S_l v_1$, kde v_1 značí rychlost, kterou voda dopadá do lahve

$$S_k v = \frac{1}{4} S_k v_1 \Rightarrow v_1 = 4v.$$

Rychlost vody při dopadu do hrdla lahve je čtyřikrát větší než rychlost, kterou voda vytéká z kohoutku.

3. Pro výpočet výšky využijeme zákona zachování mechanické energie. Na začátku před pádem má voda určitou potenciální i kinetickou energii. Potenciální energie se během pádu postupně mění na kinetickou energii až do momentu dopadu do láhve, kdy již má voda pouze kinetickou energii.

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 + 2gh = v_1^2$$

Opět z předchozí podúlohy dosadíme rychlost v_1 .

$$v^2 + 2gh = (4v)^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{15v^2}{2g}$$

Právě takto nízko pod kohoutek Vojta láhev umístil.

Natálie Lászlóová
natalie.laszloova@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.