

Úloha I.2 ... A žere a žere

5 bodů; průměr 4,09; řešilo 261 studentů

Soňa, unavená po celodenní práci, si šla doplnit energii jídlem. Vzala si talíř červeného zelí, misku bílého zelí, kus kachny, chléb se škvarkovou pomazánkou a koláček. Na kolik způsobů může celou svou hostinu sníst, liší-li se jednotlivé způsoby pouze pořadím těchto pěti jídel? Má to však háček, neboť pokud sní před a zároveň po sladkém jídle něco slaného, bude Soni špatně. Z kolika variant jí špatně nebude?



Nejprve nás zajímá počet způsobů, kterými může Soňa svou hostinu sníst, tedy počet různých kombinací pořadí daných pěti jídel. Jedno unikátní pořadí jídel se nazývá *permutace*. Počet permutací n -prvkové skupiny $P(n)$ lze spočítat jako tzv. *faktoriál* čísla n .

$$P(n) = n!$$

Faktoriál se značí pomocí vykřičníku, a ačkoliv může na první pohled vypadat děsivě, není čeho se bát. Jeho definice je poměrně jednoduchá. Faktoriál čísla n je definován jako součin všech přirozených čísel od 1 do n (včetně). Matematicky tuto definici lze zapsat následovně¹

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Takový výpočet má dobré opodstatnění. Chceme-li seřadit skupinu n různých prvků, můžeme na první místo vybrat kterýkoliv z nich, na druhé místo však již první prvek dát nelze – vybíráme tedy jen z $n - 1$ prvků a tak dále. Násobení se objevuje ve výrazu proto, že pro každý z n prvků máme $n - 1$ možností, jak dostat unikátní pořadí, čili $n \cdot (n - 1)$ možností celkem pro první dvě místa. Pro všech n míst máme celkově $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n = n!$ možností.

Jelikož pracujeme se skupinou pěti jídel, bude počet permutací této skupiny

$$P(5) = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Soňa může svou hostinu sníst 120 různými způsoby.

Dále nás zajímá, po kolika z těchto 120 permutací Soni nebude špatně. Jelikož jí bude špatně vždy, když před a zároveň po sladkém jídle jedla něco slaného, zůstává jedinou možností, aby si dala sladké jídlo buď hned na začátku své hostiny, tedy jako první v pořadí, nebo na konci jako úplně poslední.

Když určíme, že si Soňa dá koláček jako první jídlo, zbudou nám už jen čtyři další jídla, která musíme seřadit. Pokud chceme vědět, kolika způsoby je můžeme seřadit, stačí nám jen spočítat počet permutací čtyřprvkové skupiny, tedy

$$P(4) = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Teď už víme, že po minimálně 24 z původních 120 permutací jídel Soni nebude špatně. Zbývá nám již jen možnost, že si Soňa koláček dá nakonec, tedy až po všech ostatních jídlech. V tomto

¹Znak Π (velké řecké pí) se používá jako efektivní zápis pro násobení několika členů za sebou. Technicky funguje tak, že do výrazu za znakem Π (v tomto případě k) se postupně dosazují za k všechna přirozená čísla od počáteční hodnoty uvedené pod znakem Π (pro nás $k = 1$) až do koncové hodnoty uvedené nahoře (n). Spočtou se hodnoty daného výrazu pro všechna patřičná k a následně se mezi sebou všechny spočtené hodnoty vynásobí.

případě také zbývají jen čtyři jídla k libovolnému seřazení, takže počet kombinací jejich pořadí bude pořád stejný, a to 24. Výsledný počet permutací N , po kterých Soni nebude špatně, tedy bude dvojnásobkem tohoto čísla

$$N = 2P(4) = 2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48.$$

Soni nebude špatně po 48 ze 120 možných uspořádání jídel.

Vojtěch Kubrycht

vojtech.kubrycht@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.