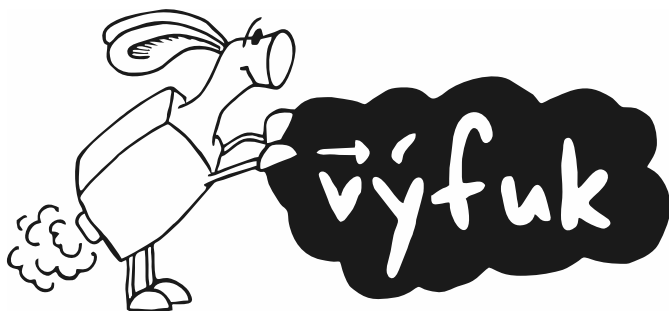




výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

školní rok se pomalu chýlí ke konci a s ním přichází i letošní poslední sada úloh Výfuku. Těšit se můžete například na průtrž mračen, smyčku smrti, či na experiment o přesýpacích hodinách. Nesmí chybět ani Výfučení, které se tentokrát zabývá zanedbáváním a aproximacemi.

V brožurce také naleznete vzorová řešení 5. série a průběžné pořadí po této sérii. Do konce školního roku se ještě můžete těšit na poslední brožurku, ve které budou poslední vzorová řešení společně s konečným pořadím v rámci letošního ročníku Výfuku.

S touto sérií máte také poslední příležitost ke získání odměn ve Výfučím bingu, tak si ji nenechte ujít!

Aby se vám po nás přes prázdniny nestýskalo, chystáme opět dvě prázdninové série a již tradiční letní tábor, na který však již máme zcela naplněnou kapacitu.

Organizátoři
vyfuk@vyfuk.org



Zadání VI. série



Termín odeslání: 26. 5. 2025 20.00

Úloha VI.1 ... Výfuček triumfuje ⑥ ⑦

5 bodů

Výfuček dokáže porazit kohokoliv ve své oblíbené hře. Její pravidla jsou jednoduchá: Na stole leží 17 žetonů a dva hráči se po jednom tahu střídají v jejich odebírání. Hráč musí ve svém tahu odebrat právě 1, 2, nebo 3 žetony. Prohrává ten, kdo odebere poslední žeton(y).

Výfuček ze své šlechetnosti nechává vždy začínat soupeře. Dokážete odhalit Výfučkovu strategii? Pro které všechny počáteční počty žetonů by také fungovala?

Úloha VI.2 ... Průtrž mračen ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

5 bodů

Viktor si pořídil sud ve tvaru válce, aby mohl zachytávat dešťovou vodu na zalévání svých květin a šetřit tak přírodu. Sud má objem $V = 200\text{ l}$ a výšku $h_1 = 120\text{ cm}$. Před bouřkou byl sud prázdný, ale po ní hladina vody dosahovala $h_2 = 30\text{ cm}$ pod jeho horní okraj. Voda do sudu stéká okapem ze střechy, která má plochu $S = 20\text{ m}^2$ a sklon $\alpha = 60^\circ$ (vůči vodorovné rovině). Pomůžete Viktorovi spočítat, kolik milimetrů srážek spadlo na metr čtvereční během bouřky?



Nápověda: Pokud během svého řešení nehodláte využít tzv. *goniometrické funkce*, může vám pomoci uvědomění, že vnitřní úhel 60° je velmi významný pro jeden konkrétní typ trojúhelníku.

Úloha VI.3 ... Problematické dřevo ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Výfuček se rozhodl uspořádat letní táborák a opéct špekáčky. V noci ovšem přišlo a jeho připravené borové dřevo zmoklo. Suchá borovice má výhřevnost $4,4\text{ kWh}\cdot\text{kg}^{-1}$. Jakou nejvyšší vlhkost (tj. množství vody v procentech celkové hmotnosti dřeva a vody) může dřevo mít, aby při jeho spálení uvolněná energie stále převyšovala energii potřebnou na odpaření obsažené vody, a Výfuček si tak mohl špekáčky opéct? Aby se voda při hoření rychle odpařila, je potřeba jí dodat energii $2,6\text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.



Úloha VI.4 ... Dlouhá skluzavka ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Viktor s Jardou si hrají na dětském hřišti. Poté, co se sklouzli ze skluzavky vysoké $h = 4,5\text{ m}$ (tzn. začátek skluzavky je $4,5\text{ m}$ nad zemí), se vsadili, kdo dřív dokáže od spodního konce skluzavky poslat svůj mobilní telefon až nahoru. Jestliže má Jardův mobil s povrchem klouzačky koeficient smykového tření $f = 0,35$, jakou minimální rychlostí ho musí poslat, aby dojel až k jejímu hornímu konci? Skluzavka má po celé své délce konstantní sklon $\alpha = 30^\circ$.

Úloha VI.5 ... Smyčka smrti ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ★

8 bodů

Vojta si hrál s Hot Wheels dráhou a sestrojil smyčku smrti s poloměrem R jako na obrázku 6. Z rampy na ni pouštěl kuličku o poloměru r a zajímalo ho, jestli kulička smyčkou projede.

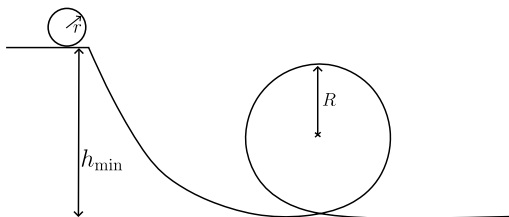
1. Jakou rychlostí se bude kulička pohybovat, když od své výchozí polohy klesla o výšku Δh ?
2. Z jaké nejmenší výšky $h_{\min}$ musí Vojta kuličku pustit, aby smyčkou projela?

Veškeré ztráty mechanické energie zanedbejte a uvažujte, že se kulička valí po dráze bez prokluzování.

Nápověda: Rotující kulička má kromě kinetické energie posuvného pohybu i energii kinetickou rotační, kterou pro plnou homogenní kouli valící se bez prokluzování rychlostí v můžeme vypočítat jako

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{5}mv^2,$$

kde m je hmotnost koule.



Obrázek 1: Nákres smyčky smrti

Úloha VI.E ... Tik tak, běží čas... 6 7 8 9

8 bodů

Když šla jednou Verča ze školy, potkala Anežku, a jak už to bývá, dala se s ní do řeči. Po chvíli si však uvědomily, že se zapovídaly déle, než by se jim líbilo – čas běžel až moc rychle. Než se stihly rozloučit, zamyslely se, jakými způsoby se dá měřit čas a jak vlastně fungují přesýpací hodiny.

Pokuste se změřit rychlost vyprazdňování libovolné sypké suroviny (například mouky nebo písku) z (komolého) kužele v závislosti na poloměru spodního kruhového otvoru kužele. Dejte pozor na to, abyste vždy odsypávali stejné množství sypké suroviny.

**Úloha VI.V ... Zanedbávací 6 7 8 9**

7 bodů

1. Ve Výfučení jsme dokázali, že pro $x \ll 1$ a přirozená k platí aproximace $(1+x)^k \approx 1+kx$. Podobně dokažte, že se aproximace dá použít i pro záporná k tím, že aproximaci dokážete alespoň pro $(1+x)^{-1}$ a $(1+x)^{-2}$. Uveďte celý postup řešení.
2. V blízkosti povrchu Země můžeme gravitační pole aproximovat jako homogenní a počítat s gravitačním zrychlením $a_g \doteq 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Do jaké výšky h nad povrchem bude rozdíl uvedené konstanty a_g a opravdové hodnoty zrychlení menší než 10 % opravdové hodnoty?
3. Možná víte, že pro teplotní délkovou roztažnost se uvádí vztah

$$l = l_0 (1 + \alpha \Delta t), \quad (1)$$

kde l_0 je počáteční délka tělesa, l je jeho koncová délka (tzn. délka po roztažení), Δt značí změnu teploty a α tzv. koeficient teplotní délkové roztažnosti. Představme si, že máme tyč o délce l_0 , následně zvýšíme její teplotu o Δt a změříme její délku l_1 . Poté ohřejeme tyč ještě jednou o Δt a změříme její novou délku l_2 . Na základě vzorce (1) bychom měli naměřit

$$l_2 = l_1 (1 + \alpha \Delta t) = l_0 (1 + \alpha \Delta t) (1 + \alpha \Delta t) = l_0 (1 + \alpha \Delta t)^2.$$

Na problém bychom ale mohli nahlížet i tak, že jsme celkem ohřáli tyč o $2\Delta t$, a délku l_2 spočíst jako

$$l_2 = l_0 (1 + 2\alpha \Delta t).$$

Který ze vzorců je ten správný? A proč?

4. Kromě délkové roztažnosti se také u pevných látek počítá i tzv. *objemová roztažnost*, která funguje na principu zvětšování objemu tělesa vlivem zvýšení jeho teploty. Platí pro ni obdobný vztah

$$V = V_0 (1 + \beta \Delta t),$$

kde místo délek vystupují objemy a koeficient α je nahrazen tzv. koeficientem teplotní objemové roztažnosti β . Často se oba koeficienty spojují přibližným vztahem

$$\beta = 3\alpha.$$

Proč tomu tak je? Dokažte alespoň na dvou tvarem různých tělesech (např. na krychli a kouli).



Výfučení: Zanedbat, či nezanedbat?

V šestém a posledním Výfučení tohoto ročníku se podíváme na téma, které se ve fyzice využívá možná více, než si myslíte. Některé vzorce jsou pro naše účely někdy až moc přesné a složité. Můžeme je ale upravit tak, aby pro nějaký okruh čísel – typicky třeba pro malé hodnoty – byly jednodušší a téměř nezměnily výsledek. Této technice říkáme *aproximování* a právě na aproximace se v tomto Výfučení podrobně podíváme.

Aproximování mocnin

Mocniny si většinou spojujeme se zvětšováním čísel, řekněme ale, že máme nějaké kladné x , které je velmi malé ve srovnání s číslem 1¹. Zvolme například $x = 0,001 = 10^{-3}$. Pokud x umocníme, dostaneme $x^2 = 0,001^2 = 0,000\,001 = 10^{-6}$. Vidíme, že umocněním jsme dostali podstatně menší hodnotu.

Představme si nyní x ve výrazu $(1 + x)^2$. Když výraz klasicky roznásobíme, dostaneme

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2.$$

V předchozím odstavci jsme si ale ukázali, že kladné mocniny x jsou oproti x velmi malé a ve většině případů zanedbatelné. Při aproximaci tak můžeme člen x^2 jednoduše vynechat, čímž dostaneme

$$(1 + x)^2 \approx 1 + 2x.$$

Je důležité poznamenat, že tyto dva výrazy se nerovnájí. Dá se pouze říct, že pro malá x mají výrazy přibližně stejnou hodnotu. Zkusme si nyní ověřit, že aproximace výsledek téměř nezmění, tedy vypočítáme hodnoty výrazu bez aproximace a s ní pro dříve zvolené $x = 10^{-3}$. Bez aproximace máme $1 + 2x + x^2 = 1,002\,001$. S aproximací dostaneme $1 + 2x = 1,002$. Rozdíl se projeví až na 6. desetinném místě, což je ve většině výpočtů již opravdu zanedbatelný rozdíl.

Co kdybychom ale měli výraz s vyšší mocninou? Ukázali jsme si, že $x^2 = 10^{-6}$ je podstatně menší než $x = 10^{-3}$. Asi vás nepřekvapí, že třetí mocnina bude ještě menší, $x^3 = 10^{-9}$.

¹Matematický zápis této skutečnosti je $x \ll 1$, znak $\ll$ znamená mnohem menší. Ten používáme, pokud je rozdíl porovnávaných veličin alespoň 2 řády např. $1 \ll 100$.

Je evidentní, že pokud je x malé, nemá smysl s vyššími mocninami počítat. Vraťme se teď k našemu původnímu výrazu $(1+x)$. Tentokrát ho ale umocníme na třetí. Rozložením dostaneme

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

Členy s x^2 a x^3 můžeme opět zanedbat a dostaneme tak $(1+x)^3 \approx 1 + 3x$. Obdobně můžeme aproximovat jakoukoli další vyšší mocninu

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 \approx 1 + 4x,$$

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 \approx 1 + 5x.$$

V tabulce 1 je vidět, jak se výraz $(1+x)^k$ mění pro postupně vyšší mocniny (pro $x = 0,001$).

k	$(1+x)^k$	$1+xk$
1	1,001 000 000	1,001 000 000
2	1,002 001 000	1,002 000 000
3	1,003 003 001	1,003 000 000
4	1,004 006 004	1,004 000 000
5	1,005 010 010	1,005 000 000

Tabulka 1: Vyčíslení mocniny $(1+x)^k$ a její aproximace $1+xk$, pro $x = 10^{-3}$

Při aproximování tedy pro každé $x \ll 1$ platí

$$(1+x)^k \approx 1+kx. \quad (2)$$

Přestože jsme tento výraz vždy upravovali pro přirozená k , aproximace platí pro libovolné celé k , což si můžete zkusit odvodit v 1. úloze spojené s tímto Výfučením. Obdobně lze vzorec upravit pro $(1-x)^k$. Dokonce se dá dokázat (sice už ne tak snadno), že vzorec (2) platí i pro libovolné reálné k .

Aproximaci můžeme rozšířit i na obecný výraz ve tvaru $(y+x)^k$, kde $x \ll y$, což se dá dokázat následující úpravou

$$(y+x)^k = y^k \left(1 + \frac{x}{y}\right)^k \approx y^k \left(1 + k\frac{x}{y}\right).$$

Vytknutím y^k ze závorky dostaneme výraz ve tvaru $(1+kx/y)$, kde $x/y \ll 1$.

Příkladem použití této aproximace je vzorec pro pozorovanou frekvenci při relativistickém Dopplerově jevu

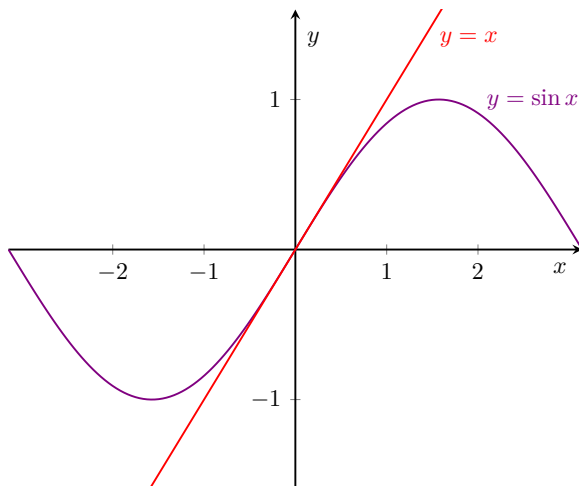
$$f = f_0 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}.$$

Tento vzorec udává, jak se pro pozorovatele změní frekvence f_0 , když se od něj vzdaluje zdroj světla rychlostí v ve vakuu. Podívejme se na příklad prolétávající rakety, jejíž rychlost je výrazně menší než rychlost světla $v \ll c$. Poté můžeme vzorec aproximovat a dostaneme známější tvar

$$\begin{aligned} f &= f_0 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = f_0 \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} = f_0 (1-v/c)^{1/2} (1+v/c)^{-1/2} \\ &\approx f_0 \left(1 - \frac{v}{2c}\right) \left(1 - \frac{v}{2c}\right) = f_0 \left(1 - \frac{v}{2c}\right)^2 \approx f_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right). \end{aligned}$$

Aproximace malých úhlů

Další typ aproximace se týká goniometrických funkcí, konkrétně funkce sinus. Pokud funkci sinus znáte, víte, že se nejedná o lineární funkci.² Pokud se však podíváme na sinus v blízkém okolí 0, uvidíme, že zde funkce roste skoro lineárně (vizte graf 2). Pokud nás tedy zajímají jen malé úhly, můžeme zavést aproximaci $\sin x \approx x$. Tato aproximace ale platí jen pro úhly vyjádřené v radiánech – ve stupních by nám vyšla špatná hodnota.³



Obrázek 2: Porovnání funkcí $y = x$ a $y = \sin x$

Opět si aproximaci ověříme. Znovu zavedeme x s malou hodnotou, tentokrát třeba $x = 0,1$ rad. Pokud do kalkulačky zadáme $\sin x$, vyjde nám hodnota 0,0998. Vidíme, že nám vyšla téměř stejná hodnota funkce sinus jako jejího argumentu. Aproximace $\sin x \approx x$ je celkem přesná až do zhruba 0,2 rad, což odpovídá úhlu $11,5^\circ$. Někdy nepotřebujeme tak přesný výsledek a můžeme aproximaci použít i pro ještě větší úhly, někdy už ale nebude stačit ani přesnost u 0,2 rad. Záleží na tom, co zrovna počítáme, a musíme sami zvážit, jestli je aproximace ještě postačující.

U funkce kosinus tuto aproximaci použít nemůžeme (alespoň ne tak jednoduše), protože se kosinus v blízkosti 0 nechová lineárně – v blízkosti 0 je ve svém maximu a má hodnotu 1. Toho ale můžeme využít jinde. Pokud znáte goniometrické funkce, víte, že funkce tangens je definovaná jako $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$. U sinu jsme si ukázali, že je v blízkosti 0 přibližně roven x . O funkci kosinus zase víme, že je v blízkosti 0 přibližně rovna 1. Tím pro tangens dostáváme $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x \approx x / 1 = x$. I pro funkci tangens tak můžeme využít aproximaci $\operatorname{tg} x \approx x$. Opět ale musíme dosazovat úhel v radiánech. Aproximace není tak přesná jako u sinu, lze ji tedy většinou použít jenom do hodnot 0,15 rad, viz tabulka 2.

²Lineární funkce je funkce, jejíž grafem je přímka.

³Úhel můžeme vyjádřit v radiánech vynásobením jeho hodnoty ve stupních konstantou $\pi/180$.

$\frac{x}{\text{rad}}$	$\sin x$	$\text{tg } x$
0,1	0,099 8	0,100 3
0,2	0,198 7	0,202 7
0,3	0,295 5	0,309 3
0,4	0,389 4	0,422 8
0,5	0,479 4	0,546 3

Tabulka 2: Porovnání $\sin x$ a $\text{tg } x$ pro malé hodnoty x v radiánech. Zaokrouhleno na 4 desetinná místa.

Pravděpodobně nejznámější použití aproximace $\sin x \approx x$ je ve vzorci pro periodu matematického kyvadla. Tento vzorec nejspíše znáte ve tvaru

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

kde l je délka lana a g tíhové zrychlení. Většinou, když se tento vzorec uvádí, je u něj připsáno, že je použitelný jen pro malé vychýlení kyvadla. Při určení síly, která navrací kyvadlo do rovnovážné polohy, se potkáme s tvarem $-mg \sin \alpha$ a pro malé α dostaneme $-mg\alpha$, tudíž je vratná síla v přiblížení lineární funkcí úhlu vychýlení. Z této aproximace se pak dostaneme ke vzorci pro periodu uvedenému výše, to ovšem vyžaduje složitou matematiku, která je nad úrovní tohoto Výfučení.

Zajisté jste si také všimli, že perioda kmitů matematického kyvadla nezávisí na počátečním vychýlení. To je pravda jen v případě, kdy využijeme výše zmíněnou aproximaci. Pokud bychom však spočítali periodu přesně, zjistíme, že na počáteční výchylce závisí. Ovšem pro malé výchylky se stává téměř konstantní a platí tedy přibližný vzorec výše.

Odpor vzduchu

Doba volného pádu tělesa o hmotnosti m je popsána vzorcem

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Tento vzorec však můžeme použít pouze v případě, kdy odpor vzduchu nehraje velkou roli. Počítáme tak vlastně, jak dlouho by daný předmět padal ve vakuu (v homogenním gravitačním poli). Pro zanedbávání odporu vzduchu existuje velmi jednoduchý důvod. Pokud bychom chtěli odpor vzduchu započítat, v první řadě bychom potřebovali znát hustotu vzduchu, odporový koeficient předmětu (ten závisí na tvaru tělesa) a plochu kolmého průřezu předmětu. I kdybychom tyto údaje měli, nestačilo by pouze „dosadit do krátkého vzorečku“. Kvůli tomu, že odporová síla velmi složitým způsobem závisí i na rychlosti tělesa, museli bychom řešit matematicky velmi složitou tzv. *diferenciální rovnici*, nebo bychom dobu pádu museli řešit numericky – počítali bychom pozici a rychlost předmětu po malých časových intervalech.

Pro malou kuličku o hmotnosti $m = 10 \text{ g}$ a s poloměrem $r = 1 \text{ cm}$, která padá na zem z výšky $h = 10 \text{ m}$, je doba pádu bez odporu vzduchu $t = 1,428 \text{ s}$. Pokud ale uvažujeme odpor vzduchu, dostaneme hodnotu $t' = 1,451 \text{ s}$. Započítání odporu vzduchu změní výsledek pouze

o $t' - t = 0,023$ s, nám ale výpočet zabere minimálně o několik minut déle. Neznamená to ale, že odpor vzduchu se dá zanedbat vždy. Pokud předmět padá z vysoké výšky nebo je velký a zároveň lehký, odpor vzduchu ovlivňuje výsledek mnohem více. V tabulce 3 můžete vidět, jak se rozdíl časů s rostoucí výškou zvětšuje.

$\frac{h}{\text{m}}$	$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{t'}{\text{s}}$	$\frac{t' - t}{\text{s}}$
10	1,428	1,451	0,023
20	2,019	2,084	0,065
30	2,473	2,593	0,120
50	3,193	3,452	0,259
100	4,515	5,256	0,741

Tabulka 3: Porovnání potřebného času k uražení vzdálenosti h , kde t je čas pádu bez odporu a t' čas pádu se započítáním odporu.

V našem příkladu jsme použili ještě další aproximaci, která má na výsledek mnohokrát menší vliv než odpor vzduchu. Počítali jsme totiž s tíhovým zrychlením g . Předpokládáme tak, že gravitační pole je homogenní – v každém bodě má stejnou hodnotu. V realitě se ale gravitační působení mění se vzdáleností těles a míří do středu planety (jedná se totiž o tzv. radiální pole). Za předpokladu, že výška nad povrchem je mnohem menší než poloměr planety, můžeme v této oblasti gravitační pole aproximovat na homogenní.

Výpočet pomocí plochy pod grafem

Ve fyzice může nastat případ, kdy je jednodušší problém vyřešit graficky než složitým výpočtem. Co tím myslíme, si ukážeme na příkladu výpočtu práce.

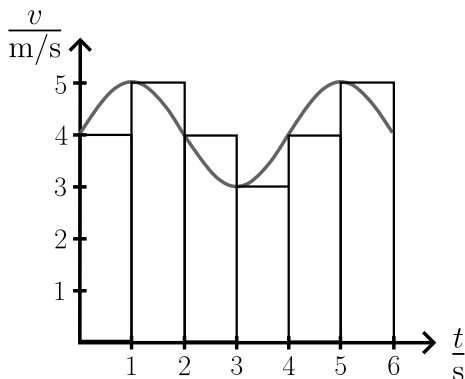
Práci lze za působení konstantní síly jednoduše popsat vzorcem $W = Fs$, kde s je uražená dráha, po kterou jsme silou F působili. Vzorec práce nám může připomínat vzorec na výpočet obsahu obdélníku $S = ab$ o stranách a a b . Když si nakreslíme závislost F na s , zjistíme, že W se opravdu rovná ploše pod grafem – v tomto případě obdélníku o stranách F a s .

Co když ale síla v průběhu pohybu nebude konstantní? Podívejme se na příklad pružiny. Při vychýlení z rovnovážné pozice o vzdálenost x zjistíme, že velikost vratné síly roste v průběhu natahování. Velikost vratné síly je rovna $F = kx$, kde k je tuhost pružiny, která popisuje, jak náročné je s pružinou pohybovat. Naivně bychom mohli předpokládat, že práce, kterou vykonáme natáhnutím pružiny, poté bude $W = Fx = kx^2$. Ale není tomu tak. Podívejme se na situaci graficky. Stejně jako předtím si nakreslíme závislost F na x , avšak tentokrát vzniklý tvar nebude obdélník, ale trojúhelník. Jelikož víme, že síla roste podle rovnice $F = kx$, dokážeme určit plochu pod grafem jako $W = kx^2/2$. Vidíme, že vzorec se oproti naivnímu výpočtu liší o násobek jedné poloviny.

Ve výše uvedeném případě se nám podařilo tímto způsobem problém vyřešit exaktně. Podívejme se na případ, kdy známe reálnou závislost rychlosti automobilu na čase – viz obrázek 4. Jak bychom dokázali určit celkovou uraženou dráhu? Znovu nám pomůže vzorec, který popisuje nejjednodušší případ rovnoměrného pohybu. Má tvar $s = vt$, což jde znovu chápat jako plocha obdélníku. Měli bychom být znovu schopni v zobecnění vypočítat dráhu jako obsah pod křivkou.



Obrázek 3: Grafy závislostí velikosti síly na dráze pro různé pohyby



Obrázek 4: Závislost rychlosti na čase pro střídavě zrychlující a zpomalující automobil

Plochu nebudeme počítat přesně, ale po jednotlivých obdélníčkách, protože ty umíme počítat jednoduše. Osu x si rozdělíme na dílky strany jedna a výšku obdélníku určíme vždy jako hodnotu rychlosti na levé straně obdélníčku. Celkově dostaneme součet ploch 6 obdélníků

$$s = (1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5) \text{ m} = 25 \text{ m}.$$

To se moc neliší od reálného výsledku, který je $s' = 25,27 \text{ m}$. Při výpočtu lze vidět, že i když jsme plochu pro některé obdélníčky nadhodnotili a pro jiné podhodnotili, tyto nepřesnosti se vzájemně vyrušily a získali jsme relativně přesný výsledek. Výpočet by šel vylepšit např. volbou menšího kroku (užších obdélníků) nebo volbou jiného geometrického tvaru např. kombinace trojúhelníků a obdélníků.

Závěr

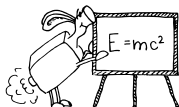
V tomto Výfučení jsme si ukázali celkem čtyři způsoby, jak (nejen) ve fyzice aproximovat. Jedná se jen o výběr těch nejužitečnějších metod, ale existují i další triky, které můžeme využít. Při výpočtech ve fyzikálních situacích je tedy vždy dobré se zamyslet, jak přesně potřebujeme znát odpověď na určitou otázku. Podle toho, zda potřebujeme mít výsledek na 3 platné cifry nebo nám stačí řádový odhad, pak můžeme zvolit způsob, jakým budeme počítat.

Max Menčík

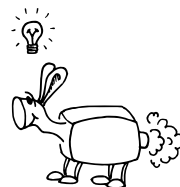
max.mencik@vyfuk.org

Patrik Kašpárek

patrik.kasperek@vyfuk.org



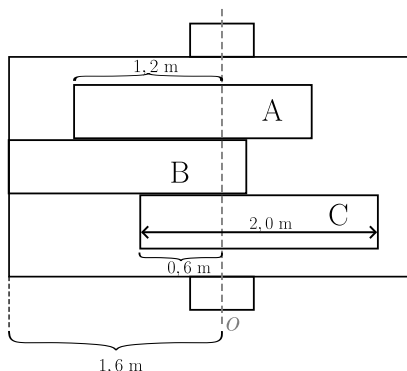
Řešení V. série



Úloha V.1 ... Dřevorubecká

5 bodů; průměr 4,69; řešilo 39 studentů

Adam s Michalem vozili na dvoukolovém vozíku z lesa pokácené klády dřeva. Na vozík naložili tři homogenní klády o stejných délkách a hmotnostech tak, jak je vidět na obrázku 5. Jelikož ale nedbale každou kládu položili do náhodné pozice, vozík se jim neustále převažoval. Aby tomu zamezili, chtěli celý vozík uvést do rovnovážné polohy (tzn. společné těžiště klád přesunout nad osu rotace kol). O jakou vzdálenost a jakým směrem mají posunout kládu označenou písmenem *A*, aby této rovnováhy dosáhli? Předpokládejte, že těžiště vozíku se nachází nad osou rotace kol a že kláda *A* leží po posunutí stále rovnoběžně s kládami *B* a *C*.

Obrázek 5: Znázornění vozíku s různě posunutými kládami vůči ose otáčení kol *O*

Jak je již zmíněno v zadání, aby se vozík nepřevrátil, musí společné těžiště klád ve vozíku ležet nad osou otáčení kol *O*. V obecném případě lze polohu těžiště více těles vypočítat jako vážený průměr poloh těžišť jednotlivých těles, kde váhami jsou hmotnosti těles. V našem případě jsou všechny klády na vozíku stejně těžké, takže nám k získání polohy společného těžiště klád stačí vypočítat aritmetický průměr poloh těžišť jednotlivých klád. Matematicky to lze zapsat následovně

$$x_T = \frac{M \cdot x_A + M \cdot x_B + M \cdot x_C}{M + M + M} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad (3)$$

kde x_T je poloha společného těžiště klád, x_A , x_B a x_C jsou polohy těžišť jednotlivých klád a M je hmotnost jedné klády.

Pro další počítání si zavedeme souřadnicový systém s osou x (osa, na které měříme polohu těžiště) kolmou na osu otáčení kol *O*, tak aby v místě, kde protíná osu otáčení kol *O* bylo $x =$

$= 0$ a hodnoty (souřadnice těžišť) stoupaly směrem doprava.⁴ Dále si musíme v této soustavě souřadnic vyjádřit polohy těžišť jednotlivých klád (x_A , x_B , x_C) a požadovanou polohu jejich společného těžiště x_T .

Vyjádření požadované polohy společného těžiště klád je nejjednodušší – podle definice naší soustavy souřadnic je rovna $x_T = 0$, protože chceme, aby společné těžiště klád leželo nad osou otáčení kol O . Z obrázku ze zadání je patrné, že kláda A je oproti naší soustavě souřadnic posunutá o 1,2 m doleva, tedy její levý konec má souřadnici $x'_A = -1,2$ m. Stejný způsobem jsme z obrázku schopni určit i souřadnice levých konců klád B a C . Získáme tak

$$x'_A = -1,2 \text{ m},$$

$$x'_B = -1,6 \text{ m},$$

$$x'_C = -0,6 \text{ m}.$$

Protože jsou klády homogenní, nachází se těžiště v polovině délky klády tj. 1 m od jejího levého konce. Polohu těžišť jednotlivých klád tak jednoduše určíme přičtením hodnoty 1 m k souřadnicím levých konců klád. Známe tedy následující souřadnice těžišť klád na obrázku ze zadání

$$x_T = 0 \text{ m},$$

$$x_A = x'_A + 1 \text{ m} = -1,2 \text{ m} + 1 \text{ m} = -0,2 \text{ m},$$

$$x_B = x'_B + 1 \text{ m} = -1,6 \text{ m} + 1 \text{ m} = -0,6 \text{ m},$$

$$x_C = x'_C + 1 \text{ m} = -0,6 \text{ m} + 1 \text{ m} = 0,4 \text{ m}.$$

Ze vztahu (3) si vyjádříme, kam je potřeba těžiště klády A umístit, jako

$$x_A = 3 \cdot x_T - x_B - x_C.$$

Po dosazení známých hodnot x_T , x_B a x_C dostaneme

$$x_A = 3 \cdot 0 \text{ m} - (-0,6 \text{ m}) - 0,4 \text{ m} = 0,2 \text{ m}.$$

O jakou vzdálenost musí Adam s Michalem kládu A posunout vypočítáme jednoduše jako rozdíl původní a nové polohy těžiště klády A

$$\Delta x_A = 0,2 \text{ m} - (-0,2 \text{ m}) = 0,4 \text{ m}.$$

Aby se vozík nepřevracel, musí Adam s Michalem posunout kládu A o 0,4 m směrem doprava.

K výsledku se můžeme dostat i prostou úvahou. Pokud chceme, aby se vozík nepřevracel, tak součet vychýlení klád od (požadovaného) těžiště na jednu stranu se musí rovnat součtu vychýlení na stranu druhou. Konkrétně to znamená, že když je kláda C odchýlená o 0,4 m doprava a kláda B o 0,6 m doleva, potřebujeme, aby kláda A byla vychýlená o 0,2 m doprava a pomohla tak kládě C vyvážit kládu B . Jestliže je ale podle obrázku kláda A vychýlená o 0,2 m doleva, musíme ji posunout o 0,4 m doprava, abychom dosáhli rovnovážné polohy.

Vojtěch Kubrycht

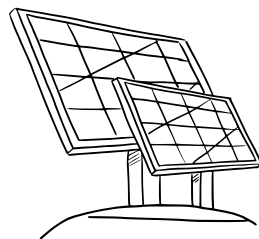
vojtech.kubrycht@vyfuk.org

⁴Osa otáčení kol O zároveň představuje osu y naší soustavy souřadnic. Tou se ale při řešení této úlohy nemusíme zabývat, protože nás zajímá pouze poloha těžiště klád ve směru osy x .

Úloha V.2 ... Výfučkovy plány

5 bodů; průměr 4,34; řešilo 96 studentů

Výfuček myslí na budoucnost planety, a proto by chtěl zajistit dostatek energie z obnovitelných zdrojů, primárně ze Slunce. Solární panely však zabírají až moc místa, takže Výfučka napadlo, že by je mohl umístit na jinou planetu. Ale na kterou? V užším výběru mu zůstali dva kandidáti: Merkur a Jupiter. Kdyby jednu z těchto planet celou pokryl solárními panely (pro potřeby této úlohy uvažujte, že to je možné), ze které by mohl odebírat více energie a kolikrát více by to bylo? Poloměry planet, jejich vzdálenost od Slunce a další potřebné konstanty si dohledejte.



Slunce v každý moment vyzáří do všech směrů zhruba stejné množství energie. Ta se od něj šíří do vesmíru po povrchu koule se středem v jádru Slunce. Plošný obsah tohoto povrchu je ve vzdálenosti R od středu Slunce roven $4\pi R^2$, proto na část povrchu této koule o obsahu S dopadá $S/4\pi R^2$ celkové energie.

Slunce v jednu chvíli osvětluje pouze polovinu planety, tj. plochu o obsahu πr^2 (v průřezu), kde r je poloměr planety.⁵ Planeta z celkového výkonu Slunce tedy přijímá část

$$P = \frac{\pi r^2}{4\pi R^2} = \frac{r^2}{4R^2}.$$

Merkur má poloměr $r_M = 2\,440$ km a jeho průměrná vzdálenost od Slunce je $R_M = 5,791 \cdot 10^7$ km. Poloměr Jupiteru je $r_J = 69\,910$ km a obíhá v průměrné vzdálenosti $R_J = 7,785 \cdot 10^8$ km od Slunce. Podílem částí zářivého výkonu, které planety odebírají, dostaneme výsledek

$$\frac{r_J^2/4R_J^2}{r_M^2/4R_M^2} = \left(\frac{R_MR_J}{R_Jr_M} \right)^2 \doteq 4,5.$$

Z Jupiteru by Výfuček získal přibližně 4,5krát více energie než z Merkuru.

Michaela Urbanová

michaela.urbanova@vyfuk.org

Úloha V.3 ... Rozdvojené lano

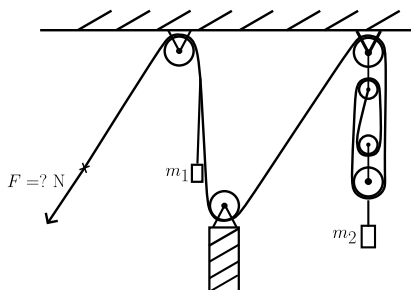
6 bodů; průměr 4,96; řešilo 84 studentů

Když se Výfuček naposledy nudil, vyrobil si vskutku netradiční kladkostroj (viz obrázek 6), lano se u něj v jednom místě totiž rozděluje. Na jednom konci visí závaží o hmotnosti $m_1 = 10$ kg. Druhý konec pokračuje dále přes několik kladek. Druhé závaží váží $m_2 = 50$ kg. Díky tomu může Výfuček zvedat obě závaží zároveň. Jakou silou musí Výfuček tahat, aby se obě závaží začala zvedat? Předpokládejte, že se během pohybu bod rozděvení lana příliš neposune.

Výfuček ke zvedání dvou těles využívá kladkostroj, který umožňuje rozložit sílu potřebnou k jejich zvednutí mezi více úseků lana. Pokud je lano rozděleno na více úseků pomocí volných kladek,⁶ síla potřebná k vyrovnání tíhové síly závaží se snižuje nepřímo úměrně počtu těchto úseků.

⁵Vzhledem k poměru velikosti poloměru planety a její vzdálenosti od Slunce můžeme zanedbat zakřivení povrchu koule šíření energie a předpokládat, že odpovídá rovnému průřezu planety.

⁶Pevná kladka pouze mění směr působení síly, volná kladka umožňuje zvedat těleso na konci lana silou, která je rovna polovině jeho tíhové síly.



Obrázek 6: Nákres Výfučkova kladkostroje

První závaží je zavěšeno na jednoduché pevné kladce, která mění pouze směr síly, ne její velikost. Síla potřebná k jeho vytáhnutí je tedy rovna tíhové síle, kterou těleso na lano působí.

$$F_1 = m_1 g = 10 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 98 \text{ N}$$

Druhé závaží je zavěšeno na systému několika kladek, které rozdělí sílu mezi více úseků lana. V případě Výfučkova kladkostroje jsou tyto úseky čtyři, což znamená, že síla potřebná ke zvednutí závaží bude pouze čtvrtina síly tíhové.

$$F_2 = \frac{m_2 g}{4} = \frac{50 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{4} = 122,5 \text{ N}$$

Celkovou sílu, kterou potřebujeme ke zvednutí obou závaží, určíme součtem velikostí jednotlivých sil.

$$F = F_1 + F_2 = 98 \text{ N} + 122,5 \text{ N} = 220,5 \text{ N} \doteq 221 \text{ N}$$

Aby Výfuček zvedl obě dvě závaží, musí za konec lana tahat silou alespoň 221 N.

Alena Mouchová

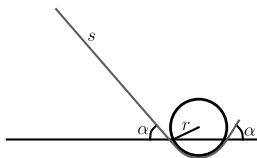
alena.mouchova@vyfuk.org

Úloha V.4 ... Dárek k narozeninám

7 bodů; průměr 5,87; řešilo 68 studentů

Peťa dostal k narozeninám auto na dálkové ovládání o hmotnosti $m = 0,80 \text{ kg}$ a rozhodl se, že ho pořádně otestuje. Vyrobit si ze dřeva rampu o délce $s = 4,5 \text{ m}$, kterou upevnil pod úhlem $\alpha = 30^\circ$ jako na obrázku 7. Za rampou vykopal prohlubeň, ze které auto vystřelí pod stejným úhlem α nahoru. Jaké největší výšky nad zemí auto dosáhlo, pokud motor působil při jízdě dolů po rovné části rampy silou $F = 5,0 \text{ N}$ a po vjetí do prohlubně byl vypnut? Veškeré ztráty mechanické energie (např. třením, odporem vzduchu, valivým odporem...) zanedbejte. Počítejte, že auto je malé a prohlubni bez problému projede.

Když se autíčko rozjíždí po nakloněné rampě, působí na něj kromě tahové síly motoru F také tíhová síla $F_G = mg$, která směřuje svisle dolů. Směr pohybu autíčka však není svislý, ale rovnoběžný s nakloněnou rovinou. Proto musíme tíhovou sílu rozložit na dvě složky – jednu kolmou k povrchu rampy $F_G^\perp$ a druhou rovnoběžnou s rampou $F_G^\parallel$. Pouze rovnoběžná složka tíhové



Obrázek 7: Nákres Petovy sestavené rampy

síly ovlivňuje pohyb autíčka po rampě, neboť působí ve směru jeho pohybu. Tuto složku $F_G^{\parallel}$ vypočteme díky goniometrické funkci sinus⁷

$$F_G^{\parallel} = F_G \sin \alpha = mg \sin \alpha .$$

Tato složka tíhové síly tedy přispívá ke zrychlení autíčka po rampě a koná práci spolu se silou motoru. Síly tedy na rampě dlouhé $s = 4,5$ m vykonají práci

$$W = mgs \sin \alpha + Fs = s(mg \sin \alpha + F) ,$$

kteřá bude rovna kinetické energii autíčka v okamžiku, kdy najíždí do prohlubně. Je jasné, že když autíčko prohlubeň opouští a je ve stejné výšce, má opět kinetickou energii rovnou práci W . Pak můžeme z rovnosti těchto energií určit rychlost autíčka v tomto bodě dráhy. Dostaneme tedy

$$\frac{1}{2}mv^2 = s(mg \sin \alpha + F) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2s(mg \sin \alpha + F)}{m}} .$$

Jelikož chceme určit maximální výšku, do níž se autíčko dostane, zajímá nás pouze svislá složka této rychlosti v_y . Stejně jako u rozkladu sil využijeme funkce sinus a úhlu α , pod kterým vektor rychlosti v míří, a zjistíme, že

$$v_y = v \sin \alpha .$$

Jelikož pohyb autíčka během letu je vlastně šikmý vrh, a díky tomu, že už známe svislou složku rychlosti, můžeme použít známý vzorec pro výpočet výšky vrhu, který vychází ze zákona zachování energie. Dostaneme rovnost

$$h = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{s(mg \sin \alpha + F) \sin^2 \alpha}{mg} ,$$

kde jsme postupně dosadili za v_y výrazy, které jsme dostali výše. Dosadíme-li hodnoty ze zadání, dojdeme k výsledku

$$h = \frac{4,5 \text{ m} \cdot (0,8 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,5 + 5 \text{ N}) \cdot 0,5^2}{0,8 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} \doteq 1,28 \text{ m} .$$

Autíčko tedy dosáhlo maximální výšky necelých 1,3 m.

Lukáš Linhart

lukas.linhart@vyfuk.org

⁷Pokud by vás zajímalo, jak se rozklad síly pomocí goniometrických funkcí provádí, můžete si přečíst naše Výfučení na vektory: https://vyfuk.org/_media/ulohy/r5/vyfucteni/vyfucteni_1.pdf.

Úloha V.5 ... (Ne)Vylité kafe

8 bodů; průměr 5,91; řešilo 56 studentů

Verča s Pétou se jeli projet autem a právě projíždí kruhovou dráhu s poloměrem $R = 400$ m. Silnice je však nakloněna o 35° vůči rovině (vnitřní oblouk silnice je níže než vnější). Verča má uvnitř auta $V = 450$ ml výběrové kávy v kelímku ve tvaru válce o poloměru $r = 4$ cm a s výškou $h = 10$ cm. Nádoba je pevně uchycena k interiéru auta. Jaká je nejmenší a největší rychlost, kterou můžou Verča s Pétou po okruhu jet, aby se kafe nevytlilo?

Na kávu v kelímku působí v průběhu jízdy z pohledu vnitřku auta dva různé typy zrychlení, tíhové a odstředivé. Tíhové zrychlení je dáno silovým působením Země a odpovídá $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, odstředivé zrychlení vypočítáme jako

$$a_o = \frac{v^2}{R},$$

kde v je rychlost pohybu auta a R poloměr dráhy.

Nejprve ale potřebujeme zjistit, jak moc se může hladina kávy naklonit vůči kelímku. Víme, že kelínek má tvar válce s poloměrem $r = 4$ cm, výškou $h = 10$ cm a je v něm $V = 450$ ml kávy. Z těchto hodnot dokážeme spočítat, kolik místa je v kelímku nad hladinou, a tím i maximální výšku, o kterou se může hladina kávy na jedné straně kelímku zvednout

$$\Delta h = h - \frac{V}{\pi r^2}.$$

Ve vzorci jsme jen odečetli od výšky kelímku výšku, do které káva dosahuje za normálních podmínek⁸ (to jsme odvodili ze vzorce pro objem válce $V = \pi r^2 h$).

Nyní potřebujeme vyjádřit, jaký by byl úhel hladiny vůči dnu kelímku α v situaci, kdy se káva na jedné straně zvedne o výšku Δh . To zjistíme pomocí funkce arkus tangens

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\Delta h}{r}\right) = \arctg\left(\frac{h}{r} - \frac{V}{\pi r^3}\right).$$

Zde si Δh můžeme představit jako protilehlou stranu a poloměr kelímku pak představuje stranu přilehlou.⁹

Samotná dráha, po které auto jede, má sklon 35° . S vyšší rychlostí se odstředivé zrychlení zvětšuje. Úhel hladiny kávy vůči zemi tedy bude při nejvyšší „bezpečné“ rychlosti $35^\circ + \alpha$, pro nejnižší rychlost to pak bude $35^\circ - \alpha$.

K vyjádření poměru mezi velikostmi g a a_o znovu použijeme funkci tangens. Protilehlá strana je v našem případě tíhové zrychlení g a přilehlá je odstředivé zrychlení a_o . Tento poměr se musí rovnat tangens maximálního/minimálního úhlu. Dostaneme tedy rovnosti

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(35^\circ \pm \alpha) &= \frac{a_o}{g}, \\ \operatorname{tg}\left(35^\circ \pm \arctg\left(\frac{h}{r} - \frac{V}{\pi r^3}\right)\right) &= \frac{v^2}{gR}. \end{aligned}$$

Teď už nezbyvá nic jiného než vyjádřit ze vztahu rychlost v

$$v = \sqrt{\operatorname{tg}\left(35^\circ \pm \arctg\left(\frac{h}{r} - \frac{V}{\pi r^3}\right)\right) gR}.$$

⁸Normálními podmínkami máme na mysli stav, kdy je hladina kávy v kelímku rovnoběžná se dnem.

⁹Je nutné také dokázat, že hladina bude skutečně rovná plocha i po naklopení, abychom mohli pro výpočet použít pravoúhlý trojúhelník. Pokud na všechna místa v kapalině působí síla o stejné velikosti a směru (což je v našem případě splněno), tak je intuitivně hladina kávy rovná.

Po dosazení nám vyjde nejvyšší rychlost $v_{\max} \doteq 67,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 244,4 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ a nejnižší $v_{\min} \doteq 38,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 137,4 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Když tedy auto pojede libovolnou rychlostí mezi $140 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ a $240 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, káva se z kelímku nevylije.

Max Menčík

max.mencik@vyfuk.org

Úloha V.E ... Nosnost magnetů

8 bodů; průměr 5,68; řešilo 63 studentů

Výfučka velmi zaujaly magnety. Pokuste se stejně jako on změřit, jakou silou je přitahován magnet k dané feromagnetické kovové ploše v závislosti na vzdálenosti, která jej od kovové plochy dělí. Pokuste se nalézt vzdálenost, v níž se přitažlivá magnetická síla mezi plochou a magnetem vyrovná s tíhovou silou magnetu. Měření proveďte alespoň pro 5 různých vzdáleností. Měnit vzdálenost mezi deskou a magnetem můžete například postupným vkládáním listů papíru mezi ně. Mějte však na paměti, že i papíry mají nějakou tíhu, kterou mohou přispívat k síle oddělující magnet od desky.

Teorie

V každém fyzikálním poli působí na jisté typy těles určitá síla – například v gravitačním poli tělesa padají vlivem gravitační síly F_g a v elektrickém poli hýbe s nabitými objekty elektrická síla F_e . Podobně i magnetické pole je spojeno s magnetickou silou F_m , která vzniká v okolí magnetu.

Každý magnet má dva póly – severní (N) a jižní (S), které kolem sebe vytváří magnetické pole. Velikost magnetické síly působící na látku v magnetickém poli závisí nejen na intenzitě magnetického pole (jak moc je pole slabé/silné), ale také na vlastnostech samotného materiálu. Feromagnetické látky jako například železo, kobalt či nikl působící sílu typicky zvyšují – jsou k magnetu více přitahovány. S rostoucí vzdáleností od magnetu slábne magnetické pole a s ním i působící přitažlivá síla. Naším úkolem bude naměřit závislost magnetické síly, kterou se materiál k magnetu přitahuje, v závislosti na vzájemné vzdálenosti.

Magnetická síla, kterou magnet působí na feromagnetické látky, je největší při přímém kontaktu. Pokud mezi magnet a rovnou horizontálně orientovanou feromagnetickou plochu vložíme jiný předmět, například list papíru, zvětšíme vzdálenost mezi nimi. Magnetické pole s rostoucí vzdáleností slábne, což způsobuje snížení přitažlivé síly mezi magnetem a kovovou plochou. Proto čím více vrstev papíru vložíme, tím slabší bude přitažlivá síla.

Vedle magnetické síly F_m působí na magnet také tíhová síla F_G . Ta bude součtem F_{G1} a F_{G2} , kde F_{G1} představuje tíhovou sílu papíru a F_{G2} je tíhová síla samotného magnetu (magnet musí unést nejen papír, ale i sebe). Zadání napovídá, že ani jednu z těchto sil nesmíme zanedbat. Aby se magnet na feromagnetické ploše udržel, musí být magnetická síla F_m alespoň nepatrně větší než celková tíhová síla F_G . Během experimentu hledáme vzdálenost, při které se obě síly vyrovnají – tedy bod, kdy magnet přestane držet na feromagnetické ploše a spadne. Jelikož se v tomto okamžiku rovná magnetická síla tíhové síle (až na znaménko), lze z rovnosti vyjádřit magnetickou sílu jako součin celkové hmotnosti a tíhového zrychlení jako $F_m = g(m_1 + m_2)$, kde m_1 je postupně se měnící hmotnost papíru a m_2 konstantní hmotnost magnetu. Když vyjdeme z této rovnosti, snadno nahlédneme, že nám bude stačit jednou změřit hmotnost magnetu a následně pokaždé hmotnosti papírů, které budeme vkládat mezi magnet a feromagnetickou plochu. Na základě toho už přímočaře dopočítáme magnetickou sílu v různých vzdálenostech.

Postup měření

K provedení experimentu jsme použili magnet, feromagnetickou plochu s požadovanými vlastnostmi (v našem případě kovový rám od dveří) a závaží z papíru různých rozměrů. Díky známé gramáži papíru nebylo těžké vyrobit i velmi lehká závaží (nejmenší mělo pouhou desetinu gramu) a zachovat minimální odchylku uvažované hmotnosti od té skutečné. Například, když jsme chtěli vyrobit závaží o hmotnosti 3 g, ustříhli jsme z papíru z gramáží $300 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}$ čtverec o hrané délky 10 cm.

Při každém měření jsme mezi magnet a rám dveří vložili určitý počet papírových závaží tak, aby magnet sotva držel. Zkoušeli jsme různé kombinace tloušťky a hmotnosti závaží, které ještě magnet unese. Tyto kombinace nám poskytly datové body – kombinace vzdálenosti mezi magnetem a rámem a hmotnosti papírových závaží. V dalším kroku jsme přičetli hmotnost magnetu m_2 , kterou jsme určili jako $m_2 = 6,8 \text{ g}$, a hodnoty vynásobili tíhovým zrychlením g , čímž jsme získali tíhovou sílu působící na magnet a tedy i hledanou magnetickou sílu F_m . Její hodnoty jsme následně zapsali do výsledné tabulky 5 a vynesli do grafu 8.

Při měření bylo důležité přidávané papíry vycentrovat vždy stejným způsobem, aby byly podmínky měření co nejvíce konzistentní. Nevýhoda klasického papíru byla v jeho přílišné ohebnosti, a tak jsme při měření používali primárně tlustší papír s vyšší gramáží.

Vzdálenost mezi magnetem a kovovou plochou l jsme spočítali na základě známé tloušťky jednotlivých papírů. Pokud bychom pracovali s papírem o neznámé tloušťce (většinou je tento údaj spolu s gramáží uvedený na balení), tloušťku bychom s dostatečnou přesností mohli určit například narovnáním velkého množství listů na sebe, změřením jejich celkové tloušťky a podělením počtem papírů.

Naměřené hodnoty

l	m_1
mm	g
0,9	46,0
1,3	38,0
1,5	26,5
1,7	20,3
1,8	18,5
2,1	14,3
2,2	11,2
2,5	8,1
2,8	6,1
3,0	4,0

Tabulka 4: Naměřené dvojice hodnot vzdálenosti mezi magnetem a kovovou plochou l a hmotnosti papírových závaží m_1

Naměřená data jsme zapsali do tabulky 4. Do tabulky 5 jsme následně doplnili dopočítanou magnetickou sílu pro jednotlivé vzdálenosti.

Ukažme si výpočet ještě na nějakém konkrétním řádku tabulky, např. pro nejmenší vzdálenost mezi magnetem a kovovou plochou. Tuto vzdálenost jsme určili s pomocí známých tlouštěk

$\frac{l}{\text{mm}}$	$\frac{F_m}{\text{N}}$
0,9	0,52
1,3	0,44
1,5	0,33
1,7	0,27
1,8	0,25
2,1	0,21
2,2	0,18
2,5	0,15
2,8	0,13
3,0	0,11

Tabulka 5: Výsledná závislost magnetické síly F_m na vzdálenosti mezi magnetem a kovovou plochou l

papíru jako $l = 0,9$ mm. Vložený papír vážil $m_1 = 46,0$ g. Magnetickou sílu F_m v této vzdálenosti lze pak spočítat jako

$$F_m = g(m_1 + m_2) = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (0,0068 \text{ kg} + 0,0460 \text{ kg}) \doteq 0,52 \text{ N}.$$

Výslednou závislost jsme pak ještě vynesli do grafu 8, aby bylo jednodušší ji následně v diskuzi analyzovat.

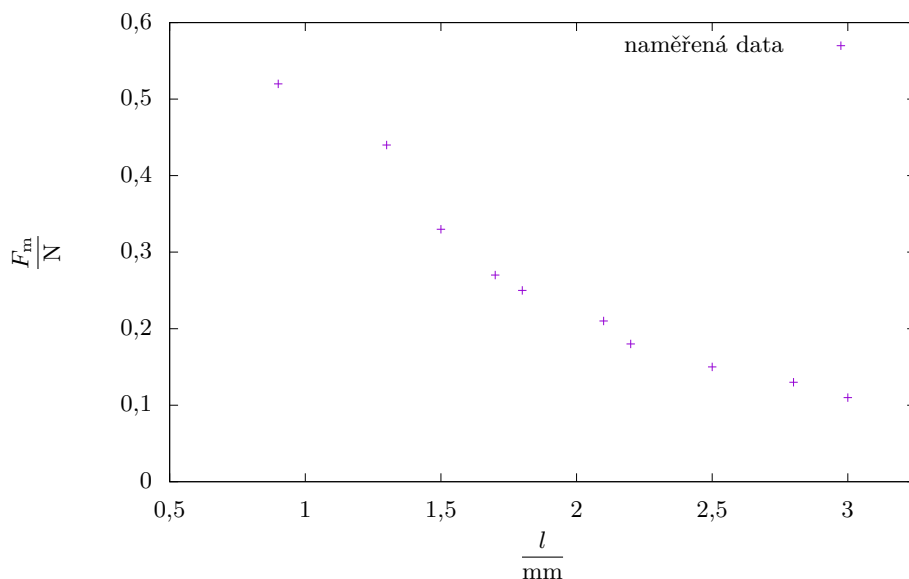
Diskuze a závěr

V průběhu experimentu jsme zaznamenali, že přitažlivá magnetická síla klesá s rostoucí vzdáleností magnetu od kovové plochy, což odpovídá teoretickému očekávání slábnutí magnetického pole.

Přestože jsme byli schopní velmi přesně určit jak vzdálenost mezi magnetem a kovovou plochou (s odhadovanou přesností 0,1 mm), tak hmotnost závaží (s odhadovanou přesností nejméně 0,1 g, ale spíše vyšší), výsledné datové body jsou zatíženy mnohem větší nejistotou měření. To je dáno tím, že bylo velmi těžké určit, zda by magnet při trochu jiné konfiguraci vložených papírů nedokázal unést v dané vzdálenosti ještě o něco málo větší hmotnost.

Pro zajímavost jsme ještě vyzkoušeli srovnávací měření několika různých výfučích magnetů. Díky tomu jsme zjistili, že různé výfučí magnety jsou různě silné (v dané vzdálenosti jsou přitahovány různou magnetickou silou). Výsledky měření dále závisí i na vlastnostech použité kovové plochy, takže přestože měli všichni řešitelé k dispozici jeden „stejný“ magnet, naměřené hodnoty se mohou mezi sebou podstatně lišit.

Naměřené hodnoty a jejich přesnost je také ovlivněna použitou metodikou měření. Bylo by například také možné měřit kromě hmotnosti papírových (nebo jiných vhodných) závaží přímo sílu, kterou je magnet přitahován ke kovové desce (například siloměrem). Tím bychom se zbavili nutnosti provádět měření pouze v krajních polohách, kde se součet tíhových sil vyrovná té magnetické. V tomto případě by přesnost měření limitovala především přesnost siloměru, která



Obrázek 8: Závislost síly F_m na vzdálenosti l magnetu a kovové plochy

by ovšem u běžně dostupných přístrojů nebyla lepší než přesnost měření pomocí papírových závaží.

Nikola Nguyen
hoang.ngan.nguyen@vyfuk.org

Natálie Lászlóová
natalie.laszloova@vyfuk.org

Úloha V.V ... KombinaDORTika

7 bodů; průměr 5,49; řešilo 67 studentů

Monča s Anežkou šly do své oblíbené cukrárny slavit úspěšný konec semestru a koupily si dohromady 8 různých zákusků.

1. Anežka má však intoleranci na laktózu, a proto si může vzít jen některé z dortů. Kolika způsoby si mohou zákusky rozdělit, pokud jsou právě 4 dorty bezlaktózové a každá z nich chce dostat alespoň jeden dortík?
2. Jaký by byl počet způsobů, kdyby se Anežka o každý dort s laktózou, který by na ni připadl, rozděli s Lukášem a rozdělení dortů by tak nebylo závislé na obsahu laktózy?
3. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 8 různými náhodně koupenými zákusky bude alespoň jeden bezlaktózový? A jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude právě polovina bezlaktózových? Pravděpodobnost, že si vyberou dort s laktózou, je stejná jako pravděpodobnost, že si vyberou dort bez laktózy.

1. První podúlohu si rozdělíme na několik případů, které mohou nastat. V prvním (nejjednodušším) dostane Monča i Anežka každá právě 4 dorty. Anežka si tedy vybírá 4 bezlaktózové dorty ze čtyř bezlaktózových dortů, což jí dává jen $\binom{4}{4} = 1$ možnost výběru. Tento případ může nastat pouze jednou, protože nás nezajímá pořadí, ve kterém dortíky Anežka nebo Monča dostanou.

V této úloze je však trochu chyták, že Anežka může dostávat pouze bezlaktózové dorty, zatímco Monča si může vybrat ze všech. Proto v dalších případech můžou Anežce dortíky pouze ubývat, kdežto Monča jich bude mít čím dál tím více.

V dalších případech má tedy Anežka pouze 3, 2 nebo 1 dortík a Monči zůstane zbytek. Spočítáme, kolika možnými způsoby si Anežka může z bezlaktózových zákusků vybrat právě tyto počty dortíků. Jak již bylo zmíněno, nezáleží na pořadí – jedná se tedy o kombinace (bez opakování). V prvním případě, když má Anežka 3 zákusky, je to kombinační číslo $\binom{4}{3} = 4$. Pro pouze 2 zákusky je to $\binom{4}{2} = 6$ a pro poslední možnost – jeden zákusek – $\binom{4}{1} = 4$. Možnost, kdy Anežka nedostane žádný dortík neuvažujeme. Všechny možnosti sečteme a dostaneme

$$\binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{4}{1} = 1 + 4 + 6 + 4 = 15.$$

Děvčata si dortíky mohou rozdělit patnácti různými způsoby.

2. Při řešení druhé úlohy se na problém podíváme „z pohledu zákusků“. Vzhledem k tomu, že již nemáme žádná omezení na obsah laktózy, každý dortík si se stejnou pravděpodobností vezme Monča nebo Anežka. Volba dortíku není nijak závislá na volbě ostatních dortíků. Můžeme tedy postupovat podle pravidla součinů, kdy má první dortík 2 možnosti, komu může připadnout (Anežce, nebo Monče), a pro každou z jeho „voleb“ existují pro další dortík opět 2 možnosti. Takto se možností větví až do posledního 8. dortíku. Máme tedy 2^8 možností.

Ještě je však potřeba vzít v potaz, že obě chtějí dostat alespoň jeden dortík. Odečteme tedy situace, kdy Anežka nebo Monča dostane všechny dortíky. Tyto situace jsou právě 2 (jedna pro Anežku a jedna pro Monču), výsledný počet možností je tedy $2^8 - 2 = 254$.

3. V posledním úkolu pomocí binomického rozdělení spočítáme pravděpodobnost toho, že si Anežka s Mončou koupí určitý počet bezlaktózových dortíků. V první části máme podmínku, že mezi koupenými dortíky musí být alespoň jeden bezlaktózový. Znamená to tedy, že vyhovují všechny situace, kdy máme jeden a více dortíků bez laktózy.

Ke zjištění počtu těchto situací použijeme pravidlo rozdílu. Pravděpodobnost splnění nějaké podmínky vypočítáme rozdílem 1 a pravděpodobnosti, že splněna nebude. V našem případě nebude podmínka splněna, pokud budeme mít všechny dortíky s laktózou. Pravděpodobnost výběru laktóзовého dortíku je $p = 50\% = 0,5$ (stejně pro bezlaktózový). Pravděpodobnost, že koupí všechny dortíky s laktózou, je tedy

$$P = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{8}{8} \cdot 0,5^8 \cdot 0,5^0 = 0,39\%.$$

Tuto pravděpodobnost tedy ještě odečteme od 1 a vidíme, že situace vypadá pro Anežku velice příznivě, neboť pravděpodobnost toho, že koupí alespoň jeden bezlaktózový dort, je 99,6%.

V druhé části již postup pouze replikujeme, ovšem teď už bez pravidla rozdílu. Potřebujeme zjistit pravděpodobnost situace, kdy budeme mít přesně polovinu dortíků s laktózou a polovinu bez ní. To odpovídá situaci, kdy budeme mít $n = 8$ dortíků, z nichž $k = 4$ bez laktózy. Pravděpodobnost, že nastane taková situace, je

$$P = \binom{8}{4} \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^4 = 27,3\%.$$

Ideální situace, kdy bude počet bezlaktózových a normálních dortíků stejný, nastane s pravděpodobností 27,3 %.

Monika Drexlerová
monika.drexlerova@vyfuk.org



Pořadí řešitelů po V. sérii

Kategorie šestých ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	V	Σ
		5	5	6	7	8	8	7	46	229
1.–2. Kryštof Bílý	ZŠ Bernarda Bolzana, Tábor	4	5	6	7	8	4	6	40	216
1.–2. Jan František Lukáš	G Jírovcova, České Budějovice	5	5	6	7	8	8	7	46	216
3.–3. Jakub Zelenka	Gymnázium, Říčany	5	4	6	3	4	7	2	31	144
4.–4. Matěj Novák	ZŠ Hranice, Tř. 1. máje	5	–	6	7	8	7	–	33	138
5.–5. Anna Achedžak	ZŠ a MŠ Červený vrch, Praha	4	5	3	5	–	–	2	19	101
6.–6. Berenika Bromová	ZŠ a MŠ da Vinci Dolní Břežany	–	–	–	–	–	–	–	–	100
7.–7. Marek Bielez	ZŠ a MŠ Bystřice	5	5	–	–	2	2	–	14	98
8.–8. Filip Kosař	G, Blansko	5	3	–	–	–	5	–	13	67
9.–9. Monika Větrovcová	ZŠ, MŠ a ZUŠ Jesenice	5	–	–	–	–	7	3	15	61
10.–10. Ondřej Píše	Gymnázium Sázavská Praha 2	–	5	–	–	–	–	4	9	52
11.–12. Jakub Brabec	ZŠ SVAT Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	48
11.–12. Štěpán Lýsek	Slovanské G, Olomouc	5	1	–	–	–	–	–	6	48
13.–13. Michaela Hanousková	ZŠ a MŠ Jičín	5	3	–	–	–	–	–	8	42

Kategorie sedmých ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	V	Σ
		5	5	6	7	8	8	7	46	229
1.–1. Richard Menšík	G, Boskovice	5	5	6	7	4	7	7	41	204
2.–2. Emilie Kimmerová	ZŠ a MŠ Kotlářská, Brno	5	5	6	7	8	8	5	44	198
3.–3. Štěpán Zouhar	G J. Blahoslava, Ivančice	5	5	3	6	2	3	7	31	176
4.–4. Michaela Plívová	ZŠ a ZUŠ České Budějovice	5	5	6	6	6	8	7	43	161
5.–5. Agnes Dostálová	G Mikulášské n. 23, Plzeň	4	5	4	3	–	3	–	19	160
6.–6. Petra Linhartová	ZŠ a MŠ Baška	5	5	2	–	5	–	7	24	159
7.–7. Petr Kysela	G, Český Krumlov	5	2	6	7	–	6	6	32	143
8.–8. Klauďie Krumpová	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	5	5	–	5	–	–	7	22	136

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	V	Σ
		5	5	6	7	8	8	7	46	229
9.–9. Petr Do Vu	ZŠ Václavkova, Mladá Boleslav	3	5	2	7	8	2	7	34	133
10.–10. Tomáš Wolf	G, Nad Alejí, Praha	5	5	6	7	–	2	5	30	123
11.–11. Anna Závrbská	G prof. J. Patočky, Praha	5	2	6	–	–	2	2	17	122
12.–12. Alexandr Lukács	G J. A. Komenského, Uh. Brod	5	–	6	6	–	6	2	25	118
13.–13. Klára Šimková	G Mikulášské n. 23, Plzeň	5	5	3	7	6	–	6	32	112
14.–14. Anna Ličková	G, Litoměřická, Praha	5	5	4	–	–	5	6	25	109
15.–15. Polina Efimova	Sunny Can. International Sch.	–	–	–	–	–	–	–	–	107
16.–16. Ella Heinichová	G a ZUŠ, Šlapanice	5	–	–	–	–	–	–	5	104
17.–17. Pavel Do Vu	ZŠ Václavkova, Mladá Boleslav	5	4	3	7	3	2	4	28	101
18.–18. Viktorie Židková	ZŠ a MŠ Baška	–	–	–	–	–	–	–	–	93
19.–19. Karel Olšar	G, Český Krumlov	5	4	6	–	–	–	4	19	91
20.–20. Matěj Fouček	G, Palackého 191, Ml. Boleslav	4	–	6	–	–	–	–	10	88
21.–21. Fabián Muster	G Chotěboř	–	–	–	–	–	–	–	–	82
22.–23. Michal Baloun	G Mikulášské n. 23, Plzeň	5	–	6	–	8	–	–	19	73
22.–23. Tadeas Moroz	Ilandaskolan	5	5	–	–	–	–	4	14	73
24.–25. Aurelie Kepková	G, Olomouc-Hejčín	–	2	3	–	–	–	1	6	66
24.–25. Eliška Voráčová	G, Brno-Bystrc	3	–	–	–	–	5	–	8	66
26.–26. Anna Karpíšková	G Mensa, Praha	4	–	–	–	–	–	–	4	63
27.–27. Jan Harmach	ZŠ a MĚŠ Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	53
28.–29. Melinka Čejpová	Arcibiskupské G, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	45
28.–29. Dominik Jochymek	ZŠ, Vendryně	–	–	–	–	–	–	–	–	45
30.–30. Zuzana Dorotíková	ZŠ a MŠ Lískovec, K Sedlístím, F	–	–	–	–	–	–	–	–	44
31.–31. Ivana Šarochová	ZŠ Amálská, Kladno	–	–	–	–	–	–	–	–	42
32.–32. Kristýna Rybková	ZŠ Úvoz, Brno	5	–	6	–	–	–	–	11	37
33.–33. Elen Kršková	G, Mikulov	–	5	6	–	–	–	–	11	36
34.–34. Josef Hlaváč	G Mikulášské n. 23, Plzeň	5	–	–	–	–	–	–	5	35
35.–36. Rodion Pysarev	G Opatov, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	33
35.–36. Štěpán Remeš	G, Hustopeče	–	–	–	–	–	–	–	–	33
37.–37. Zuzana Koplíková	G, Brno-Bystrc	5	–	–	–	–	3	–	8	30
38.–39. Markéta Kejřová	G T. G. Masaryka, Litvínov	–	–	–	–	–	3	–	3	28

Kategorie osmých ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	V	Σ
		5	6	7	8	8	7	7	41	204
1.–1. Lukáš Kopecký	G, Litomyšl	–	5	6	7	8	8	7	41	201
2.–2. Viktorie Snášelová	Masarykovo G, Plzeň	–	5	6	7	8	7	7	40	199
3.–3. Oleg Šatánek	Střední škola Hradec Králové	–	5	6	7	8	8	7	41	196
4.–4. Vladimír Kotsch	Gymnázium Sázavská Praha 2	–	5	6	5	8	7	6	37	189
5.–6. Eva Brožovičová	Podkrušnohorské G, Most	–	5	6	7	4	8	7	37	185
5.–6. Amelie Zemanová	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	4	7	7	7	7	37	185
7.–7. Pavel Doskočil	G, Žamberk	–	5	3	7	5	7	7	34	179
8.–9. Pavla Holečková	Jungmannova ZŠ Beroun 2	–	4	6	7	8	7	4	36	175
8.–9. Matyáš Kubíček	G a ZŠ Labyrinth	–	2	6	5	8	7	7	35	175
10.–10. Lucie Bělová	G Opatov, Praha	–	4	3	4	3	4	4	22	161
11.–11. Rafael Foltýn	ZŠ Boženy Němcové, Litoměřice	–	5	2	6	4	7	7	31	158
12.–13. Lukáš Košovan	Gymnázium Oty Pavla, Praha	–	4	6	6	4	8	5	33	147
12.–13. Bartoloměj Stoklásek	ZŠ Troubelice	–	4	6	6	6	–	–	22	147
14.–14. Anna Přivětivá	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	145
15.–15. Matěj Vacek	ZŠ T. G. M. Lomnice nad Popelkou	–	5	6	4	–	–	6	21	125
16.–16. Eva Sýkorová	G a JŠ, Břeclav	–	5	–	5	–	–	–	10	123
17.–17. Blanka Nováková	G, Vídeňská, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	119

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	V	Σ
		5	6	7	8	8	7	41	204	
18.–18. <i>Dorota Guzi</i>	ZŠ a MŠ Pastviny, Brno	–	5	6	4	–	–	4	19	109
19.–19. <i>Thea Pauzerová</i>	G Mensa, Praha	–	5	–	–	–	–	–	5	91
20.–20. <i>Karel Benedikt</i>	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	83
21.–21. <i>Valentýna Sochorová</i>	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	75
22.–22. <i>Domínika Martínková</i>	G Františka Křížíka, Plzeň	–	1	–	–	–	–	–	1	71
23.–23. <i>Petr Kalina</i>	Mensa G, Praha 6	–	5	–	–	6	–	–	11	68
24.–24. <i>Jaroslav Motlák</i>	G Opatov, Praha	–	5	6	7	–	–	–	18	66
25.–25. <i>Lucie Jurásková</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	64
26.–26. <i>Dita Křížková</i>	Sportovní G, Plzeňská, Kladno	–	–	6	–	–	–	3	9	54
27.–29. <i>Eliška Humlová</i>	G, Cheb	–	–	–	–	–	–	–	–	50
27.–29. <i>Lucie Vaňková</i>	ZŠ Dr. Františka Ladislava Riegr	–	–	–	–	–	–	–	–	50
27.–29. <i>Štěpán Vlasák</i>	G Jiřího z Poděbrad, Poděbrady	–	2	6	6	–	–	1	15	50
30.–31. <i>Matěj Máša</i>	ZŠ Kvítková, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	46
30.–31. <i>Matěj Straka</i>	ZŠ a MŠ Dolní Bojanovice	–	4	6	–	–	–	–	10	46
32.–33. <i>Martin Konečný</i>	Masarykovo G, Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	–	42
32.–33. <i>David Vančata</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	42
34.–35. <i>Josef Sedláček</i>	G J. Barranda, Beroun	–	5	–	–	–	–	–	5	40

Kategorie devátých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	V	Σ
		5	6	7	8	8	7	41	204	
1.–1. <i>Matěj Dudek</i>	ZŠ Polabiny 3, Npor. Eliáše	–	5	6	7	8	7	6	39	196
2.–2. <i>Jan Horský</i>	G, Brno - Řečkovice	–	5	6	7	8	8	4	38	193
3.–3. <i>Vít Kuplík</i>	G, Zábřeh	–	5	6	6	8	8	7	40	190
4.–4. <i>Mariana Hořínková</i>	Wichterlovo G, Ostrava	–	5	6	7	6	8	7	39	189
5.–5. <i>Valentina Vykoukalová</i>	ZŠ Komenského, Zlín - Malenovice	–	5	6	7	6	8	4	36	186
6.–6. <i>Rozálie Michaela Furchová</i>	G, Židlochovice	–	5	6	7	4	7	7	36	181
7.–7. <i>Aneta Brzokupilová</i>	Jungmannova ZŠ Beroun 2	–	5	6	4	5	8	7	35	174
8.–8. <i>Květa Bouchalová</i>	G, Olomouc-Hejčín	–	4	6	6	–	–	6	22	170
9.–9. <i>Emma Polcarová</i>	Sportovní G, Plzeňská, Kladno	–	0	6	5	0	–	7	18	165
10.–10. <i>Antonín Šreiber</i>	ZŠ Skálava, Turnov	–	4	6	7	8	6	4	35	164
11.–12. <i>Adam Houdek</i>	ZŠ a MŠ, Březová, okr. U. H.	–	5	5	7	8	8	7	40	160
11.–12. <i>Viktor Novák</i>	Nový PORG, Praha	–	5	3	5	6	8	7	34	160
13.–14. <i>Petr Matějka</i>	G, Brno - Řečkovice	–	5	6	7	8	8	7	41	151
13.–14. <i>Dan Školař</i>	ZŠ a MŠ, Březová, okr. U. H.	–	5	6	6	–	5	6	28	151
15.–15. <i>Karolína Vtípilová</i>	ZŠ Hrušovany nad Jevišovkou	–	2	2	5	6	–	7	22	146
16.–17. <i>Filip Brabec</i>	G T. G. Masaryka, Litvínov	–	4	2	3	3	7	6	25	141
16.–17. <i>Šimon Swaczyna</i>	Slovanské G, Olomouc	–	4	–	7	–	–	7	18	141
18.–18. <i>Matouš Štastný</i>	G, Omská, Praha	–	5	6	7	8	–	5	31	138
19.–19. <i>Angela Poláchová</i>	Biskupské G, Brno	–	5	6	7	8	–	–	26	135
20.–20. <i>Barbora Petrášková</i>	28. základní škola Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	131
21.–21. <i>David Výborný</i>	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	–	4	3	5	3	5	6	26	128
22.–22. <i>Kateřina Kučerová</i>	G Ústavní, Praha	–	5	6	7	2	6	7	33	125
23.–23. <i>Jaroslav Hatina</i>	15. základní škola Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	115
24.–25. <i>Maria Sidorova</i>	První české G, Karlovy Vary	–	5	3	3	–	8	6	25	112
24.–25. <i>Jakub Vávra</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	5	6	6	5	–	–	22	112
26.–26. <i>Jakub Folber</i>	G Na Vítězném pláni, Praha	–	5	6	1	4	1	7	24	110
27.–27. <i>Jan Štábl</i>	ZŠ Bratří Čapků, Ústí nad Orlicí	–	5	2	2	6	–	–	15	102
28.–30. <i>Michal Blahoš</i>	G, Benešov	–	4	4	7	8	–	7	30	99

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	V	Σ
		5	6	7	8	8	7	41	204	
28.–30. Matouš Brzobohatý	ZŠ Albertova, Kroměříž	–	4	6	7	8	–	–	25	99
28.–30. Vratislav Košina	ZŠ a MŠ Věry Čáslavské, Praha 6	–	–	–	–	–	–	–	–	99
31.–31. Jaroslav Routa	Mensa G, Praha 6	–	5	6	–	–	4	–	15	96
32.–32. Matyáš Vícha	G Uničov	–	4	3	5	6	4	3	25	95
33.–33. Johana Smítková Elizabeth	Mensa G, Praha 6	–	3	6	–	–	5	4	18	94
34.–35. Flora Eisner	G, Litoměřická, Praha	–	2	3	–	–	6	–	11	92
34.–35. Martina Merglová	Krkonošské G a SOŠ Vrchlabí	–	5	6	7	6	8	7	39	92
36.–36. Lukáš Cafourek	G, Strakonice	–	5	6	4	2	4	–	21	87
37.–37. Vladislav Ejřimov	Sunny Can. International Sch.	–	–	–	–	–	–	–	–	83
38.–38. Laura Jurčickova	FZŠ při PedF UK Barrandov	–	–	–	–	–	–	–	–	71
39.–40. Anna Duží	Masarykovo G, Příbor	–	5	–	–	–	4	–	9	64
39.–40. Jan Zámečník	Biskupské G, Brno	–	5	–	–	–	5	–	10	64
41.–41. Štěpán Bartáček	ZŠ Na Výsluní, Uherský Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	63
42.–42. Magdalena Čejpová	Arcibiskupské G, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	59
43.–43. Tomáš Malíček	G T. G. Masaryka, Litvínov	–	–	–	–	–	–	–	–	57
44.–44. Ondřej Paroubek	ZŠ a MŠ Nerudova, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	56
45.–45. Jan Bezděk	ZŠ Náchod - Plhov	–	–	–	–	–	–	–	–	55
46.–46. Amálie Hlávková	ZŠ, Znojmo, Mládeže 3	–	5	3	–	–	–	–	8	54



Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <https://vyfuk.org>
e-mail: vyfuk@vyfuk.org



/ksvyfuk



@ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.