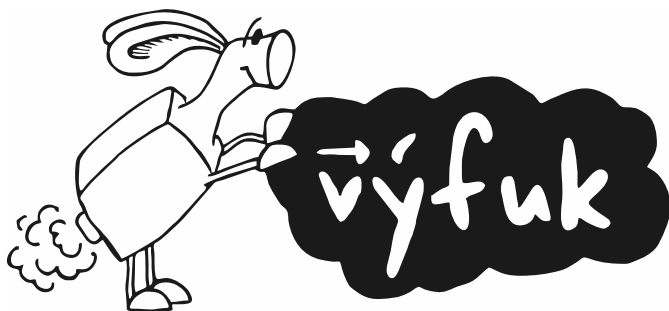




výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

do rukou se vám dostala již pátá brožurka čtrnáctého ročníku Výfuku. Najdete v ní vzorová řešení čtrté série, odpovídající výsledkovou listinu a samozřejmě i zadání předposlední, tedy páté série. Můžete se těšit například na Výfučkovy plány se solárními panely, maximální rychlost, při které nebude hrozit vylití kafe a ve Výfučtení se tentokrát dozvíte něco o kombinatorice a pravděpodobnosti.

Ve dnech 14. –16. března také proběhlo jarní setkání řešitelů Výfuku, tentokrát v Ostravě. Organizátoři si opět připravili pestrou nabídku přednášek i her a na exkurzi nás uváděla Vysoká škola Báňská.

Dále ještě připomínáme, že i letos probíhá výfučí bingo. Nezapomeňte se podívat, jestli náhodou nemáte nárok na nějakou odměnu, a případně nám pošlete poštou anebo na e-mail vyplněné tabulky.

Organizátoři
vyfuk@vyfuk.org



Zadání V. série

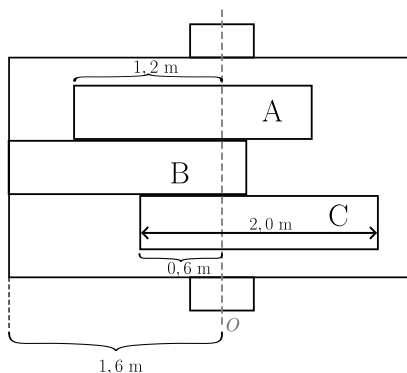


Termín odeslání: 14. 4. 2025 20.00

Úloha V.1 ... Dřevorubecká ⑥ ⑦

5 bodů

Adam s Michalem vozili na dvoukolovém vozíku z lesa pokácené klády dřeva. Na vozík naložili tři homogenní klády o stejných délkách a hmotnostech tak, jak je vidět na obrázku 1. Jelikož ale nedbale každou kládu položili do náhodné pozice, vozík se jim neustále převážoval. Aby tomu zamezili, chtěli celý vozík uvést do rovnovážné polohy (tzn. společné těžiště klád přesunout nad osu rotace kol). O jakou vzdálenost a jakým směrem mají posunout kládu označenou písmenem *A*, aby této rovnováhy dosáhli? Předpokládejte, že těžiště vozíku se nachází nad osou rotace kol a že kláda *A* leží po posunutí stále rovnoběžně s kládami *B* a *C*.

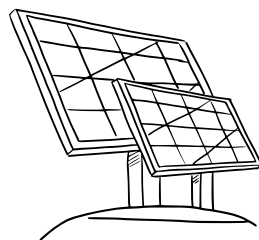


Obrázek 1: Znárodnění vozíku s různě posunutými kladami vůči ose otáčení kol O

Úloha V.2 ... Výfučkovy plány ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

5 bodů

Výfuček myslí na budoucnost planety, a proto by chtěl zajistit dostatek energie z obnovitelných zdrojů, primárně ze Slunce. Solární panely však zabírají až moc místa, takže Výfučka napadlo, že by je mohl umístit na jinou planetu. Ale na kterou? V užším výběru mu zůstali dva kandidáti: Merkur a Jupiter. Kdyby jednu z těchto planet celou pokryl solárními panely (pro potřeby této úlohy uvažujte, že to je možné), ze které by mohl odebírat více energie a kolikrát více by to bylo? Poloměry planet, jejich vzdálenost od Slunce a další potřebné konstanty si dohledejte.



Úloha V.3 ... Rozdvojené lano ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

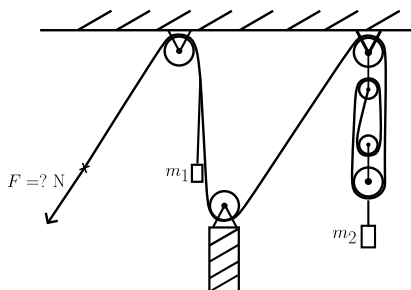
6 bodů

Když se Výfuček naposledy nudil, vyrobil si vskutku netradiční kladkostroj (viz obrázek 2), lano se u něj v jednom místě totiž rozděluje. Na jednom konci visí závaží o hmotnosti $m_1 = 10$ kg. Druhý konec pokračuje dále přes několik kladek. Druhé závaží váží $m_2 = 50$ kg. Díky tomu může Výfuček zvedat obě závaží zároveň. Jakou silou musí Výfuček tahat, aby se obě závaží začala zvedat? Předpokládejte, že se během pohybu bod rozdělení lana příliš neposune.

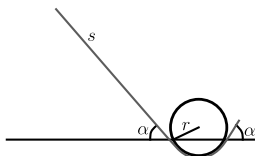
Úloha V.4 ... Dárek k narozeninám ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Peťa dostal k narozeninám auto na dálkové ovládání o hmotnosti $m = 0,80$ kg a rozhodl se, že ho pořádně otestuje. Vyroblil si ze dřeva rampu o délce $s = 4,5$ m, kterou upevnil pod úhlem $\alpha = 30^\circ$ jako na obrázku 3. Za rampou vykopal prohlubeň, ze které auto vystřelí pod stejným úhlem α nahoru. Jaké největší výšky nad zemí auto dosáhlo, pokud motor působil při jízdě dolů po rovné části rampy silou $F = 5,0$ N a po vjetí do prohlubně byl vypnut? Veškeré ztráty mechanické energie (např. třením, odporem vzduchu, valivým odporem...) zanedbejte. Počítejte, že auto je malé a prohlubni bez problému projede.



Obrázek 2: Nákres Výfučkova kladkostroje



Obrázek 3: Nákres Petovy sestavené rampy

Úloha V.5 ... (Ne)Vylité kafe ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ★

8 bodů

Verča s Pétou se jeli projet autem a právě projíždí kruhovou dráhu s poloměrem $R = 400$ m. Silnice je však nakloněna o 35° vůči rovině (vnitřní oblouk silnice je níže než vnější). Verča má uvnitř auta $V = 450$ ml výběrové kávy v kelímku ve tvaru válce o poloměru $r = 4$ cm a s výškou $h = 10$ cm. Nádoba je pevně uchycena k interiéru auta. Jaká je nejmenší a největší rychlost, kterou můžou Verča s Pétou po okruhu jet, aby se kafe nevylilo?

Úloha V.E ... Nosnost magnetů ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

8 bodů

Výfučka velmi zaujaly magnety. Pokuste se stejně jako on změřit, jakou silou je přitahován magnet k dané feromagnetické kovové ploše v závislosti na vzdálenosti, která jej od kovové plochy dělí. Pokuste se nalézt vzdálenost, v níž se přitažlivá magnetická síla mezi plochou a magnetem vyrovná s tíhovou silou magnetu. Měření proveďte alespoň pro 5 různých vzdáleností. Měnit vzdálenost mezi deskou a magnetem můžete například postupným vkládáním listů papíru mezi ně. Mějte však na paměti, že i papíry mají nějakou tíhu, kterou mohou přispívat k síle oddělující magnet od desky.

Úloha V.V ... KombinaDORTika ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Monča s Anežkou šly do své oblíbené cukrárny slavit úspěšný konec semestru a koupily si dohromady 8 různých zákusků.

1. Anežka má však intoleranci na laktózu, a proto si může vzít jen některé z dortů. Kolika způsoby si mohou zákusky rozdělit, pokud jsou právě 4 dorty bezlaktózové a každá z nich chce dostat alespoň jeden dortík?

2. Jaký by byl počet způsobů, kdyby se Anežka o každý dort s laktózou, který by na ni připadl, rozdělila s Lukášem a rozdělení dortů by tak nebylo závislé na obsahu laktózy?
3. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 8 různými náhodně koupenými zákusky bude alespoň jeden bezlaktózový? A jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude právě polovina bezlaktózových? Pravděpodobnost, že si vyberou dort s laktózou, je stejná jako pravděpodobnost, že si vyberou dort bez laktózy.



Výfučtení: Kombinatorika a pravděpodobnost

Milí řešitelé, vítajte u již pátého letošního Výfučtení. V této sérii se trochu odkloníme od klasických fyzikálních témat, nicméně nemusíte být zklamaní. Ukážeme si základy kombinatoriky a pravděpodobnosti, které mají nejen ve fyzice, ale i v logice a především matematice velice široké a praktické využití. Jistě se vám už někdy stalo, že jste s nevěřícím výrazem sledovali své okolí a kladli si otázku: „Jaká je pravděpodobnost, že...?“. V tomto Výfučtení se dozvíte, jak najít správnou odpověď.

Základy kombinatoriky

Nejdříve začneme rychlým přehledem základních pojmů. Samotná kombinatorika je matematická disciplína z oblasti diskrétní matematiky (což znamená, že pracuje pouze s přirozenými čísly). Kombinatorika nám říká, jak a kolika způsoby můžeme za stanovených podmínek z daného počtu různých prvků (množiny), vybrat určité (ne nutně různé) počty prvků s nějakou společnou vlastností nebo třeba v konkrétním pořadí. Obecně jsou tyto metody výběru celkem tři.

Permutace

Permutace využijeme ve chvíli, kdy vybíráme vždy všechny prvky. Jednotlivé varianty výběru se tedy budou lišit pouze pořadím (typické využití je u otázky kolik n -ciferných čísel dokážeme sestavit, pokud máme k dispozici n číslic). Takové varianty nazýváme *permutace* a jejich celkový počet spočítáme tak, že si pro n různých prvků představíme přesně n pozic, na které je chceme umístit, a položíme si otázku: „Kolik mám možností, jak obsadit první místo?“ Odpověď je n . Nyní se ptáme na druhé místo, ale tam již můžeme dát jen $n - 1$ prvků, protože jeden už obsadil první pozici. A takhle pokračujeme až do konce. Není těžké si rozmyslet, že se jednotlivé počty možností mezi sebou násobí, protože pro každou jednu volbu na dané pozici se počty výběru větví do různých možností na pozicích dalších. Tím získáme tzv. *faktoriál*, který značíme $n!$ a jde o zkrácený zápis výrazu

$$P(n) = n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1.$$

Výpočet počtu permutací nám však může zkomplikovat opakování. Může nastat situace, kdy vybíráme z prvků, které nejsou všechny různé – některé se opakují. Náš výpočet se bude lišit tím, že počet permutací všech prvků vydělíme počtem permutací každého z opakujících se prvků (tedy pokud se nám jeden prvek z výběru opakuje 3krát a druhý prvek 2krát, budeme dělit $3! \cdot 2!$). To si opět můžeme představit tak, že mezi sebou prohazujeme stejné prvky. Jenže tím, že se prvky od sebe neliší, vlastně na výsledném pořadí nic neměníme. Tímto dělením tedy eliminujeme všechna duplicitní uspořádání.

Variace

Variace jsou podobné permutacím, ovšem s tím rozdílem, že vybíráme vždy menší počet prvků, než kolik jich máme celkem k dispozici. Rovněž však záleží na pořadí prvků v daném výběru.

Počet variací n různých prvků je tedy opět součinem, ale nikoliv čísel od 1 do n , jako je tomu u permutace, ale pouze od $n - k + 1$ do n , kde k je počet prvků, které vybíráme. Máme totiž pouze k pozic, u nichž se postupně ptáme, kolik prvků do nich můžeme dosadit. Počet variací k -té třídy z n prvků (vybíráme k prvků z n a záleží na jejich pořadí) zapíšeme jako:

$$V(k, n) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

I u variace se můžeme setkat s opakujícími se prvky. V tomto případě opět vydělíme součinem faktoriálů počtu, kolikrát je ve výčtu opakující se prvek obsažen (zcela stejně jako u permutací).

Kombinace

Poslední metodou výběru jsou kombinace, kde z n prvků vybíráme k prvků, na jejichž pořadí nám vůbec nezáleží. Jde tedy vlastně o variace bez permutací každé vybrané k -tice. Toto reprezentují tzv. *kombinační čísla*.

Kombinační čísla využijeme nejen pro výpočet kombinací, jejich využití přesahuje i do výpočtů pravděpodobnosti, které si ukážeme dále. Kombinační číslo čteme „ n nad k “ a vypočítáme jej jako

$$K(k, n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Je jasné, že nezáleží na tom, zda se prvky, z nichž vybíráme, opakují, či jsou různé. Jejich pořadí totiž nebereme v potaz.

Kombinace s opakováním řešíme v případě, kdy vybíráme z n různých prvků nějakých k prvků a ve výběru se mohou jednotlivé prvky libovolně opakovat (k tedy může být větší než n). Představme si, že máme v obchodě na výběr z $n = 4$ druhů ovoce (například banány, jablka, meruňky a ananasy) a chceme nakoupit celkem $k = 8$ kusů (je nám jedno, z kolika druhů ovoce se náš nákup bude sestávat, může to být z jednoho, ale i ze všech čtyř). Tuto úlohu budeme řešit pomocí tzv. oddělovačů – tedy od sebe pomyslně oddělíme jednotlivé druhy ovoce. Např. v situaci $BBB|JJ|M|AA$ vidíme, že abychom od sebe oddělili jednotlivé druhy ovoce, museli jsme použít 3 oddělovače. Tyto oddělovače budou měnit svou pozici v závislosti na množství jednotlivého ovoce (jiné složení nákupu by vypadalo např. $|JJJJJJ|AA$). Celkový počet kombinací nákupu proto zjistíme jako $\binom{8+3}{3} = 165$ možností. Tento vzorec si snadno můžeme zobecnit – vybíráme pozice $n - 1$ oddělovačů (neboť oddělovačů bude vždy o 1 méně, než je počet variant, ze kterých máme na výběr) z $n + k - 1$ možných umístění. To je tedy

$$K'(k, n) = \binom{n + k - 1}{n - 1} = \binom{n + k - 1}{k}.$$

Pascalův trojúhelník

Kombinatorické schéma, které shrnuje všechna kombinační čísla a dává nám do nich jakýsi vhled, se nazývá Pascalův trojúhelník. Ten si můžeme představit třeba tak, že se jedná o trojúhelník, který má nahoře 1 a v každém dalším patře má součet čísel nad ním. Po stranách

horní 1 si tedy představíme 0 a můžeme začít sčítat další a další patra. To je asi nejintuitivnější způsob konstrukce Pascalova trojúhelníku.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
 \end{array}$$

Obrázek 4: Pascalův trojúhelník

Pro nás je však tento matematický konstrukt zajímavý z úplně jiného důvodu, a tím jsou právě kombinační čísla. Na první pohled se to může zdát trochu neintuitivní, nicméně Pascalův trojúhelník je vlastně přehled všech kombinačních čísel. Jeho jednotlivé členy, které jsme původně konstruovali součtem předcházejících členů, totiž můžeme bez jakékoliv znalosti předchozích pater vypočítat právě z příslušných kombinačních čísel.

Každé patro je totiž kombinační číslo (počet prvků, ze kterých vybíráme, je počet čísel v předchozím patře a poloha v řádce je, kolik čísel z nich chceme vybrat). Zmíněná 1 na samotném vrcholu je totiž kombinační číslo $\binom{0}{0}$. Tedy kolika způsoby můžeme vybrat právě žádný prvek z celkem nula prvků – konkrétně jedním (ano, formálně je tento způsob to, že vlastně nic neuděláme).

Z vlastností Pascalova trojúhelníku můžeme odpozorovat několik esenciálních vlastností kombinačních čísel. První z nich je evidentní ze samotného sčítacího mechanismu vzniku trojúhelníku. Tedy to, že když sečteme dvě kombinační čísla, dostaneme číslo „pod nimi“. V řeči formálního zápisu kombinačních čísel to vyjádříme

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Zápis si již můžete sami pomocí faktoriálů rozepsat a ověřit, že rovnost skutečně platí.

Další užitečná vlastnost vychází ze symetrie trojúhelníku podél výšky procházející číslem v nejvyšším řádku. Říká nám, že některé kombinace jsou shodné, konkrétně to platí pro

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Tvrzení si můžeme rovněž ověřit úvahou, že pokaždé, když vybíráme k věcí z n možností, je to jako z n vybírat $n-k$ věcí, které vlastně nevybereme. V prvním případě tedy vybíráme samotné prvky množiny a v druhém vybíráme prvky, které v množině „necháme“. Je zřejmé, že tato čísla musí vyjít stejná, protože pro každou jednu kombinaci prvků, které v množině ponecháme, existuje právě jedna kombinace prvků, již si vybereme. Tedy každá jedna varianta musí být obsažena v obou číslech.

Samotné využití Pascalova trojúhelníku v realitě není moc rozšířené. Může fungovat jako tabulka, z níž lze číst kombinační čísla, pokud by se nám nechtělo počítat faktoriály. Nicméně jako demonstrace několika základních principů kombinačních čísel a toho, jak v praxi fungují, slouží opravdu dobře.

Pravděpodobnost

Nyní si ještě uděláme krátký vhled do základů pravděpodobnosti. Pravděpodobnost nějakého obecného jevu spočítáme jako podíl případů, ve kterých k jevu došlo, a všech případů, kdy k němu dojít mohlo. Z toho lze vyvodit důležitý poznatek, že žádná pravděpodobnost není větší než 1.

Nejdůležitější vlastností, které mohou dva jevy z hlediska pravděpodobnosti mít, je nezávislost. Znamená to, že spolu dvě veličiny vůbec nesouvisí a jedna s druhou se nijak neovlivňují. Pokud jsou naše dva jevy nezávislé, jejich pravděpodobnosti jsou naprosto separátní hodnoty, tedy fakt, že nastala jedna z nich, nám vůbec nic neřekne o věci druhé. Nezávislé veličiny mohou být například čísla padlá na kostce při dvou po sobě následujících hodech.

S pravděpodobnostmi nezávislých jevů se tedy poté počítá tak, že pokud chceme zjistit, s jakou pravděpodobností nastanou oba zároveň, vynásobíme spolu dílčí pravděpodobnosti jednotlivých jevů.

Binomické rozdělení pravděpodobnosti

To, k čemu se kombinatorika, kombinační čísla a pravděpodobnost opravdu hojně používají (nejen ve fyzice), je binomické rozdělení pravděpodobnosti.

Slovo „rozdělení“ nám popisuje škálu nebo míru jednotlivých událostí. Lze si to představit tak, že hodněkrát uděláte nějakou věc, která může mít jen omezený počet výsledků (typicky se udává hod kostkou nebo mincí), a postupně si zapisujete, jak každý jeden pokus dopadl. Poté se podíváte, v jaké míře vycházely které výsledky, a – voilà – máte rozdělení.

Binomické rozdělení pravděpodobnosti nám poté udává pravděpodobnost daného výsledku. Slovo *binomické* nám popisuje jakousi dualitu, kterou v sobě toto rozdělení skrývá. Binomické rozdělení se totiž zaměřuje pouze na pokusy, které mohou skončit buď úspěchem, nebo neúspěchem. Pravděpodobnost úspěchu, resp. neúspěchu, přitom pro všechny pokusy zůstává stejná. Jak si tato dvě kritéria zadefinujete už je na vás, nicméně musí být vzájemně jednoznačně rozlišitelná a musí dohromady pokrýt všechny možné výsledky (u hodu kostkou to může být například úspěch sudé číslo a neúspěch liché).

Vzorec pro pravděpodobnost, že v binomickém rozdělení, v němž pravděpodobnost úspěchu pokusu je p , nastane z celkových n pokusů právě k úspěchů, je

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Takto můžeme například vypočítat, jaká je pravděpodobnost, že se střelec s úspěšností $p = 70\% = 0,7$ trefí z $n = 5$ pokusů právě $k = 4$ krát.

První činitel, jímž je kombinační číslo, odpovídá počtu všech možných pořadí, v nichž mohly 4 trefy nastat. Druhý a třetí činitel, tj. p^k s $(1-p)^{n-k}$, pak vyjadřují pravděpodobnost, že nastane přesně k úspěchů a k tomu přesně $n-k$ neúspěchů v jednom daném pořadí. Dáme-li vše dohromady, dostaneme pravděpodobnost jevu (druhý s třetím činitelem) v určité konfiguraci přenásobenou počtem těchto konfigurací, tj. možností, jak k jevu mohlo dojít (první činitel).

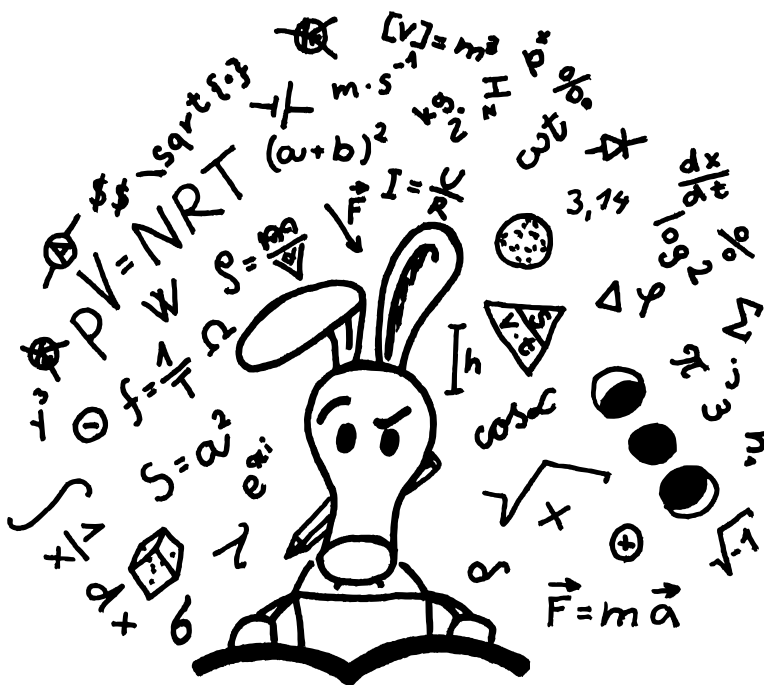
Závěr

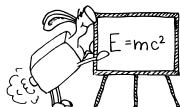
To by od nás bylo o kombinatorice a pravděpodobnosti vše. V matematice, fyzice, ale především statistice se jedná o důležité nástroje, které nám mohou mnohé prozradit o pravděpodobnosti

našeho úspěchu v nějaké deterministické situaci, hazardních hrách, či kolik a jakých možností máme, abychom mohli vybrat tu optimální (tento princip se hojně využívá v tzv. *diskrétní matematice*). Takže příště, až budete koukat na test, který jste úspěšně natipovali, můžete si spočítat, jaké jste vlastně měli štěstí, neboli s jakou pravděpodobností se vám podaří trefit minimálně ten váš počet správných odpovědí.

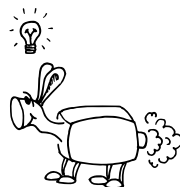
Monika Drexlerová
monika.drexlerova@vyfuk.org

Anežka Čechová
anezka.cechova@vyfuk.org





Řešení IV. série

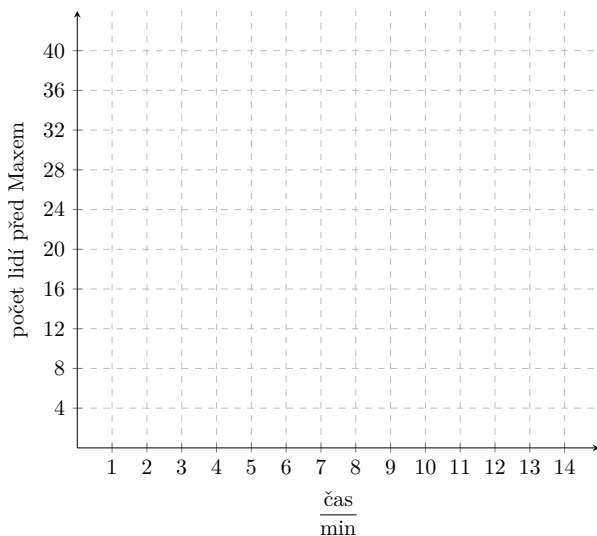


Úloha IV.1 ... Fronta na oběd

5 bodů; průměr 4,43; řešilo 51 studentů

Max čeká ve frontě na oběd. Kuchařky zvládnou vydat 1 oběd po 10 sekundách. Při čekání si ale Max všimne, že ho každých 30 sekund předběhne jeden neposlušný žák. Po prvních pěti minutách navíc předběhne Maxe ještě skupina 12 nezbedných studentů. Po jaké době dostane Max svůj oběd, pokud před ním na začátku (tzn. v čase 0 min) čekalo 40 žáků?

Úlohu se můžete pokusit řešit i graficky. V tomto případě postupujte tak, že určíte počet lidí čekajících ve frontě před Maxem v časech, které jsou uvedeny v grafu 5. Následně své výsledky do přiloženého grafu zanešte a pomocí něj určete, kdy se Max k jídlu dostane.

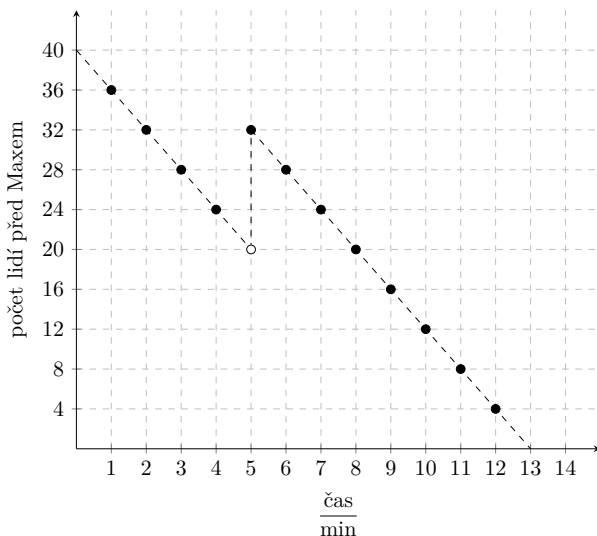


Obrázek 5: Prázdný graf na vyplnění

Úlohu řešme nejprve graficky. Protože za minutu vydají kuchařky oběd přesně $60\text{s}/10\text{s} = 6$ žákům a přesně $60\text{s}/30\text{s} = 2$ žáci Maxe předběhnou, postoupí Max ve frontě vždy o $6 - 2 = 4$ místa dopředu. Počet čekajících se tedy každou minutu o 4 sníží.

V 5. minutě však ale Maxe navíc 12 žáků předběhne a on se tak posune o $12 - 4 = 8$ míst dozadu. Maxův posun postupně po minutách zaznamenáme do grafu 6. Jakmile dojdeme opakovaným odečítáním 4 (kromě zmíněné 5. minuty) k nule, máme vyhráno, protože přesně v té

době dostal poslední člověk před Maxem svůj oběd a Max je tak na řadě. V případě, že dojdeme k jinému číslu menšímu než 4, tj. 1, 2 resp. 3, musíme k dané minutě ještě přičíst 10 s, 20 s, resp. 40 s, což je doba, za kterou kuchařky obslouží zbylé 1, 2, resp. 3 studenty. Ve třetím případě Maxe stihne ještě další žák předběhnout, proto musíme přičíst 40 s, a ne jen 30 s.



Obrázek 6: Vyplněný graf

Výsledek můžeme získat i čistě početně. Kdyby se Max pohyboval plynule dopředu, blížil by se k výdejně průměrnou rychlostí 4 místa za minutu.

Protože se za prvních $t = 5$ min posune pouze o $vt = 20$ míst dopředu, stihne jej skupinka předběhnout. Jeho situace je tedy stejná, jako kdyby všech 12 studentů před ním už na začátku stálo, a tudíž musí ujít $40 + 12 = 52$ míst, což zvládne za čas

$$T = \frac{n}{v} = \frac{52}{4} \text{ min} = 13 \text{ min}.$$

Zde si musíme dát velký pozor, protože napsaná pohybová rovnice platí jen pro celé minuty, jelikož jsme Maxův původně přerušovaný pohyb zprůměrovali na plynulý právě vzhledem k minutám. Kdyby nám jako zbytek po dělení vyšlo, že v dané minutě ještě 1, 2, resp. 3 žáci před Maxem čekají, musíme podle toho k výsledku přičíst 10 s, 20 s, resp. 40 s, obdobně jako u grafického řešení.

V našem případě po dosazení hodnoty rychlosti zjistíme, že se Max dostane na řadu přesně za 13 minut.

Matěj Sochor

matej.sochor@vyfuk.org

Úloha IV.2 ... Dvě mouchy jednou ranou 5 bodů; průměr 4,22; řešilo 105 studentů

Výfuček se chtěl soustředit na své úžasné fyzikální úvahy a myšlenky, když vtom ho začaly rušit otravné mouchy. V jeden moment však konečně obě přistály na kruhovém stole o průměru 1 m a Výfuček spatřil příležitost. Mouchy jsou na sobě nezávislé a sedí na stole na dvou náhodných místech. Jaká je pravděpodobnost, že Výfuček se zavazánýma očima trefí čtvercovou plácačkou o straně délky 10 cm obě mouchy jednou ranou? Předpokládejte, že celá plácačka dopadne na stůl a že všechna místa na stole mají stejnou pravděpodobnost, že se do nich Výfuček trefí, a zároveň i stejnou pravděpodobnost, že na nich bude sedět moucha. Úder je tak rychlý, že se mouchy nestihnou vůbec pohnout.



Strana plácačky měří $d = 0,1$ m, její obsah je $S_p = d^2$. Plocha kruhového stolu o poloměru $r = 0,5$ m je $S_s = \pi r^2$. Moucha má stejnou pravděpodobnost, že se bude nacházet na jakémkoliv místě na stole, proto se bude ve vybraném čtverci nacházet s pravděpodobností P , která odpovídá poměru obsahu plácačky S_p a stolu S_s .

$$P = \frac{S_p}{S_s} = \frac{d^2}{\pi r^2}$$

Pravděpodobnost, že se v daném čtverci nachází i druhá moucha, je také P . Jedná se o dva nezávislé jevy – poloha jedné mouchy nijak neovlivní polohu druhé mouchy. Pravděpodobnost výskytu několika nezávislých jevů lze určit jako součin pravděpodobností výskytu každého z jevů. V našem případě tedy dostáváme

$$p = P \cdot P = P^2 = \frac{d^4}{\pi^2 r^4} \doteq 0,016 \, \%$$

Michaela Urbanová

michaela.urbanova@vyfuk.org

Úloha IV.3 ... Zákon schválnosti

6 bodů; průměr 5,30; řešilo 91 studentů

Matěj si k snídani namazal chleba se svou oblíbenou marmeládou od babičky. Je to ale nešika, takže mu chleba spadl. A co hůř – na podlahu dopadl namazanou stranou. Původně jej držel namazanou stranou nahoru a při upuštění mu dodal úhlovou rychlost $3,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Z jaké nejmenší výšky by musel Matějovi chleba spadnout, aby vykonal alespoň půl otočky a zároveň se po dopadu nepřevážil na namazanou stranu? Uvažujte, že se chleba na danou stranu převážil, pokud tato strana svírá s podlahou úhel menší než 90° .

K vypočtení výšky, ze které musí chleba pro jedno otočení spadnout, budeme potřebovat zjistit, za jak dlouho se krajíc chleba otočí do takového úhlu, ze kterého se převrátí na zem nenamazanou stranou. Protože je ale v zadání uvedena úhlová rychlost ω v radiánech (značeno rad) za sekundu, je buďto potřeba převést úhel dopadu (krajíc chleba se převážil nenamazanou stranou dolů, pokud se před dopadem otočí alespoň o úhel $\varphi = 270^\circ$) na stupně pomocí vztahu

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi},$$

nebo můžeme rovnou využít definice radiánů. Ta říká, že plný úhel (360°) odpovídá 2π rad, a tudíž tři čtvrtiny plného úhlu (270°) můžeme zapsat jako $\varphi = 3\pi/2$ rad. Úhlová rychlost udává, jaký úhel φ opíše rotací nějaké těleso či systém za určitou dobu t

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

Je to podobný zákon jako u rovnoměrného přímočarého pohybu, akorát „designovaný“ na rotační pohyb, takže místo dráhy zde vystupuje úhel a místo rychlosti úhlová rychlost. Pomocí tohoto vztahu lze vyjádřit čas, za který se chleba otočí o potřebný úhel φ

$$t = \frac{\varphi}{\omega}.$$

Čas t slouží jako spodní hranice pro dobu pádu chleba ze stolu, aby chleba nedopadl namazanou stranou. Pokud známe tento čas, posledním krokem je již jen zjištění vzdálenosti, kterou chleba před dopadem urazí. Výšku letu lze vyjádřit vztahem

$$h = \frac{1}{2}gt^2,$$

jelikož se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí. Aby chléb spadl opět na nenamazanou stranu, bude muset padat z výšky alespoň

$$h = \frac{g\varphi^2}{2\omega^2}.$$

Po dosazení tíhového zrychlení $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, úhlu otočení $\varphi = 1,5\pi$ rad a úhlové rychlosti $\omega = 3,8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ dostáváme

$$h \doteq 7,5 \text{ m}.$$

Můžeme tedy vidět, že chleba musí letět minimálně z výšky 7,5 m, což je taktéž důvodem, proč nám bohužel většinou chleby padají namazanou stranou dolů. Je dobré si uvědomit, že nestačí upustit chleba z výšky libovolně vyšší než 7,5 m. Při mnohem vyšších výškách totiž chleba vykoná více než jednu a čtvrt otočky a opět dopadne namazanou stranou dolů. Z toho vyplývá, že bezpečné výšky, ze kterých lze chleba upustit, tvoří pouze určité intervaly. Nás však zajímá pouze základní minimální výška, která je sama o sobě už dost vysoká.

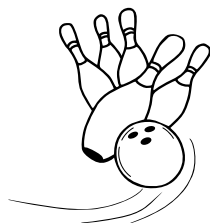
Matěj Sochor

matej.sochor@vyfuk.org

Úloha IV.4 ... Křišťálový bowling

7 bodů; průměr 5,32; řešilo 60 studentů

Viktor si šel s Lukášem zahrát bowling. Jelikož mají rádi experimenty, rozhodli se hrát s křišťálovou koulí. Viktor hodil kouli na dráhu dlouhou $s = 20 \text{ m}$ rychlostí $v = 8,0 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Lukáš si lehl na zem a pozoroval kuželky na konci dráhy skrz kouli. Všiml si, že se jejich velikost mění. Se zaujetím se zamyslel nad tímto jevem a ihned se rozhodl spočítat, jak závisí příčné zvětšení obrazu kuželek Z oproti jejich skutečné velikosti na čase t od vypuštění koule. Pomocí laserového ukazovátka zjistil, že se koule chová jako spojná čočka s ohniskovou vzdáleností $f = 10 \text{ cm}$. Pokuste se stejně jako Lukáš znázornit graficky závislost zvětšení kuželek Z



na čase t . Body příslušící spočteným hodnotám času zanepte do grafu s osami Z a t a pokuste se spojit body (přibližně) vhodnou hladkou křivkou.

Křišťálová koule se v úloze chová jako spojná čočka, její optické vlastnosti jsou popsány zobrazovací rovnicí

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}, \quad (1)$$

kde a je předmětová vzdálenost, a' obrazová vzdálenost a f je ohnisková vzdálenost.

Aby Lukáš dokázal určit závislost zvětšení kuželek na čase, musí využít další optický parametr čočky – příčné zvětšení Z , které odpovídá poměru vzdáleností a a a' od čočky.

$$Z = -\frac{a'}{a} \quad (2)$$

Záporné znaménko značí, že je vzniklý obraz převrácený. Tím se ale Lukáš nemusí zabývat, jelikož ho zajímá pouze velikost zvětšení.

Z rovnice (1) si vyjádříme obrazovou vzdálenost a' , která nám říká, jak daleko od čočky vzniká obraz, pokud známe předmětovou a ohniskovou vzdálenost.

$$a' = \frac{af}{a - f}$$

Křišťálová koule se pohybuje konstantní rychlostí v , předmětová vzdálenost se tedy bude rovnoměrně zmenšovat

$$a = s - vt.$$

Dosazením těchto dvou vztahů do rovnice (2) nám vyjde vzorec, který vyjadřuje, jak se příčné zvětšení kuželek mění v čase t

$$Z(t) = \frac{af}{a(a - f)} = \frac{f}{s - f - vt}. \quad (3)$$

S rostoucím časem t se čočka přibližuje ke kuželkám, čímž se snižuje předmětová vzdálenost a . Tím se obrazová vzdálenost a' zvětšuje a zvětšení Z také roste.

Pomocí vztahu (3) spočítáme zvětšení Z pro hodnoty času t od $t = 0,0\text{s}$ do $t = 8,0\text{s}$. Vypočítané hodnoty jsou uvedeny v tabulce (1).

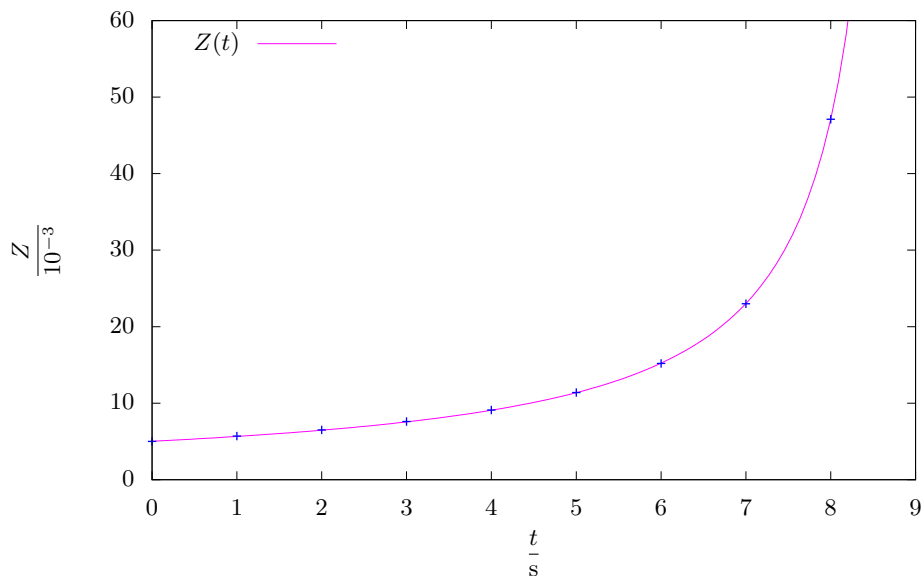
$\frac{t}{\text{s}}$	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
$\frac{Z}{10^{-3}}$	5,0	5,7	6,5	7,6	9,1	11,4	15,2	23,0	47,1

Tabulka 1: Tabulka příčného zvětšení v závislosti na čase

Teď už jen vypočítané hodnoty z tabulky (1) zaneseme do grafu (viz obrázek 7). Z grafu, ve kterém jsme zanesené body spojili hladkou křivkou, je patrné, že zvětšení roste čím rychleji, čím je koule blíže kuželkám.

Natalie Lászlóová
natalie.laszloova@vyfuk.org

Alena Mouchová
alena.mouchova@vyfuk.org



Obrázek 7: Závislost příčného zvětšení na čase je nelineární a výrazněji se projevuje při menší předmětové vzdálenosti

Výfuček sledoval cyklistické závody na velodromu¹ a hned si představil sám sebe jako jednoho ze soutěžících. Spočítejte, v jaké vzdálenosti r od vnitřní hrany velodromu by musel Výfuček jet, aby do cíle dorazil za co nejkratší čas. Předpokládejte, že velodrom je kruhový, má konstantní sklon a že Výfuček pojede tak, aby výslednice na něj působících sil byla kolmá k povrchu velodromu.



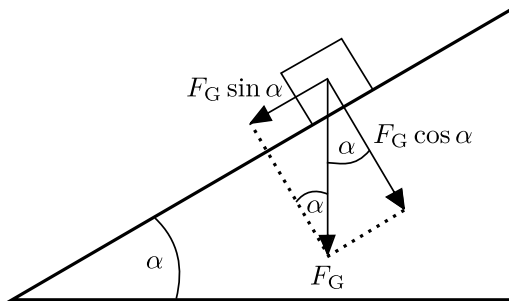
Při jízdě na velodromu ovlivňuje cyklistu několik sil. Kromě tíhové síly působící na cyklistu kolmo k povrchu země na něj působí také odstředivá síla, která vzniká při pohybu po zakřivené dráze. Aby závodník zůstal na dráze a nevyjel ven nebo nemusel jet nakloněný vůči povrchu a riskovat smyk, musí být výslednice těchto sil kolmá k povrchu velodromu. To znamená, že vektorové složky tíhové a odstředivé síly rovnoběžné s povrchem dráhy se musí vzájemně vyrušit.

Tíhovou sílu F_G si tedy rozložíme na dvě složky, z nichž pro nás bude důležitá složka rovnoběžná s povrchem $F_G^{\parallel}$.

$$F_G^{\parallel} = mg \sin \alpha$$

Tato složka musí být vyvážena odstředivou silou, která je závislá na rychlosti cyklisty a polo-

¹Velodrom je obvykle oválná cyklistická dráha s nakloněným povrchem uzpůsobeným pro jízdu ve vysokých rychlostech.



Obrázek 8: Rozklad sil na nakloněné rovině

měru zakřivení dráhy. Opět potřebujeme pouze složku rovnoběžnou s povrchem²

$$F_{\parallel} = \frac{mv^2}{R+r} \cos \alpha,$$

přičemž R představuje poloměr dráhy (resp. její vnitřní hrany) a r horizontální vzdálenost od vnitřní hrany velodromu. Dostáváme rovnost

$$\frac{mv^2}{R+r} \cos \alpha = mg \sin \alpha. \quad (4)$$

Abychom zjistili, v jaké vzdálenosti od středu musí cyklista jet pro co nejrychlejší projetí okruhu, vyjádříme si čas t , za který jedenkrát urazí dráhu velodromu

$$t = \frac{s}{v}.$$

Jelikož má velodrom kruhový tvar, dráha s bude představovat obvod kružnice

$$s = 2\pi(R+r).$$

Rychlost v si vyjádříme z rovnice (4)

$$t = \frac{2\pi(R+r)}{\sqrt{g(R+r) \operatorname{tg} \alpha}} \Rightarrow t = 2\pi \sqrt{\frac{(R+r)}{g \operatorname{tg} \alpha}}.$$

Abychom získali co nejmenší čas, potřebujeme minimalizovat výraz pod odmocninou. Jediná veličina, kterou můžeme ovlivnit, je vzdálenost od vnitřní hrany r , se kterou roste také čas. To znamená, že cyklista dosáhne nejkratšího času, pokud pojede co nejbližší vnitřní hraně velodromu, tedy ve vzdálenosti $r = 0$ od jeho vnitřní hrany.

Natálie Lászlóová

natalie.laszloova@vyfuk.org

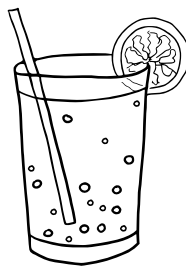
²Rozklad odstředivé síly lze provést podobně jako u tíhové síly. Může se vám zdát poměrně náhodné, že je nyní složka rovnoběžná s povrchem dráhy úměrná kosinu úhlu α , kdežto u tíhové síly jeho sinu. Souvisí to ale s tím, že celková odstředivá síla je na tíhovou kolmá. Pokud chcete tip na to, jak provádět rozklad sil efektivněji, můžete si zkusit říct, že u těchto jednoduchých rozkladů bude hledaná složka úměrná buďto sinu, nebo kosinu příslušného úhlu. Pro rozhodnutí, kterou z těchto funkcí použít, si stačí určit, jakou hodnotu by měla mít hledaná složka pro význačné úhly $\alpha = 0^\circ$ a $\alpha = 90^\circ$. Tato technika nemá stoprocentní spolehlivost, ale je dobré si ji vyzkoušet, pro získání správného fyzikálního citu pro to, kdy se podobné triky dají použít a kdy ne.

Úloha IV.E ... Limča

8 bodů; průměr 7,27; řešilo 66 studentů

Lukáše na kolejkách velmi zaujal nový sodastream – přístroj na naperlení vody. Začali tedy spolu s Anežkou přemýšlet, jak vlastně funguje. Zjistili, že sodastream do vody přidává potravinářský oxid uhličitý CO_2 , to jim ale nestačilo a rozhodli se bádát dále. Pokuste se jako Lukáš s Anežkou změřit hmotnost vyšuměného CO_2 ze sycené limonády a porovnejte ho s celkovou hmotností CO_2 uvedenou na etiketě lahve. Zkuste získat šuměním co nejvíce CO_2 . Svou metodu měření důkladně popište, zaměřte se primárně na zachytávání a zjišťování hmotnosti vyšuměného CO_2 .

Nápověda: Velký výtěžek CO_2 z limonády dostanete například tak, že do ní nasypete sůl.



Teorie

Do perlivých nápojů se pod zvýšeným tlakem přidává plyn oxid uhličitý CO_2 . Ten se ve vodě H_2O , rozpouští za vzniku méně stabilní kyseliny uhličitě H_2CO_3 , která se zde vyskytuje v kapalném skupenství a spolu s vodou tvoří homogenní směs. Proto v lahvi minerálky žádné bublinky nevidíme.

Pokud se najednou sníží tlak v lahvi, začne se kyselina uhličitá rozpadat zpátky na oxid uhličitý a vodu. K tomu dochází po otevření utěsněné lahve. Oxid uhličitý pak uniká jako stoupající bubliny.

Plýnný CO_2 potřebuje méně energie na uvolnění, jsou-li v tekutině už nějaké bubliny. Například pokud lahev protřepeme, dostanou se do minerálky bubliny vzduchu a oxid uhličitý se uvolní snáz. Uvolňování můžeme pomoci také tak, že ponoříme do lahve nějaký předmět s nepravidelnou strukturou. To může být například sůl, písek nebo mentosky. Nepravidelnosti na povrchu společně s povrchovým napětím způsobí, že na předmětu zůstanou vzduchové bublinky a CO_2 se opět uvolní.

Popsaného principu v experimentu využijeme. Do minerálek budeme přidávat sůl a vážit, o kolik se hmotnost minerálky změní, čímž zjistíme hmotnost uniklého CO_2 .

Měření

K měření jsme zvolili stejně 0,5l minerálky s obsahem (hmotnostní koncentrací) CO_2 alespoň $4\text{ g}\cdot\text{l}^{-1}$. Nejprve jsme zvážili jejich hmotnosti m_0 . Následně jsme do každé postupně nasypali celkem 15 g soli, což zhruba odpovídalo stavu, kdy už se sůl přestala rozpouštět a další bubliny se téměř nevytvářely. Znovu jsme vážením zjistili hmotnosti minerálek m . Hmotnost CO_2 jsme určili jako

$$m_{\text{CO}_2} = m_0 + 15\text{ g} - m.$$

Nakonec jsme ještě pro srovnání spočítali hmotnost samotných nápojů tím, že jsme hmotnosti prázdných lahví m_1 odečetli od m_0 . Výsledky jsme zaznamenali do tabulky 2.

Diskuze a závěr

Naší metodou jsme vytěžili cca 102 % minimálního množství CO_2 obsaženého v minerálce. Ovšem vzhledem k vysokým nepřesnostem měření nemá smysl uvádět výsledek tak přesně a můžeme tvrdit jediné to, že byl náš výtěžek přibližně roven minimální koncentraci CO_2

n	$\frac{m_0 - m_1}{\text{g}}$	$\frac{m_{\text{CO}_2}}{\text{g}}$
1	507,9	2,0
2	508,2	2,5
3	508,9	2,3
4	509,8	1,7
5	510,1	1,7
průměr	509,0	2,0

Tabulka 2: Naměřená hmotnost CO_2 v minerálkách

uvedené na etiketě. Zdrojem nepřesností může být například to, že se spolu s CO_2 vypařovala i vodní pára.

Michaela Urbanová

michaela.urbanova@vyfuk.org

Úloha IV.V ... Sluneční družice

7 bodů; průměr 6,08; řešilo 71 studentů

Výfuček se jednoho dne zamyslel nad tím, jak Slunce září. Začal se o to zajímat, a tak si na internetu vyhledal něco o SDO družici. Družice SDO pozorující Slunce se nachází 36 000 km nad povrchem Země.

1. Solární panely SDO pokrývají plochu $S = 6,6 \text{ m}^2$ kolmou k přicházejícímu záření ze Slunce. Jaký maximální zářivý výkon může SDO ze Slunce získávat?
2. Došlo k erupci a ze Slunce se odtrhlo plazma, které letělo přímo k družici rychlostí $v = 1\,500 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. O kolik procent se zkrátí případně prodlouží jeho pozorovaná vlnová délka oproti té původní?
3. Vypočítejte, za jak dlouho dorazí částice oblaku plazmatu k oběžné dráze Země.

Vzdálenost Země od Slunce je přibližně $r = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ a zářivý výkon Slunce $L = 3,85 \cdot 10^{26} \text{ W}$.

1. Slunce každou sekundu vyzáří energii $E = 3,85 \cdot 10^{26} \text{ J}$, která se šíří jako kulová plocha do prostoru. Ve vzdálenosti r se tedy vyslaná energie rovnoměrně rozprostře na ploše o velikosti povrchu koule s poloměrem r , tj. $S = 4\pi r^2$. Na 1 m^2 pak ve vzdálenosti Země, která je od Slunce vzdálená $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, dopadne

$$\frac{E}{S} = \frac{E}{4\pi r^2} \doteq 1\,362 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Takto vypočítanou hodnotu nazýváme *sluneční konstantou pro Zemi*. Na solární panely SDO proto každou $t = 1 \text{ s}$ dopadne $6,6 \cdot 1\,362 \doteq 9 \text{ kJ}$, mohou tedy ze Slunce odebírat maximální výkon přibližně $P = 9 \text{ kJ}/1 \text{ s} \doteq 9 \text{ kW}$.

2. Pro výpočet využijeme vztah pro relativistický dopplerovský posuv z Výfučení

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c},$$

kde $\Delta\lambda/\lambda$ vyjadřuje hledaný poměr změny vlnové délky $\Delta\lambda$ a původní vlnové délky λ , jež odpovídá poměru relativní rychlosti pozorovatele se zdrojem v a rychlosti světla $c \doteq 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Částice a pozorovací družice se k sobě přibližují relativní rychlostí $v = 1500 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, tudíž se pozorovaná vlnová délka zkrátí, a to o $v/c = 0,5\%$.

3. Částice letící rovnoměrně přímočaře rychlostí v se dostanou na úroveň oběžné dráhy Země za čas

$$t = \frac{s}{v} = \frac{1,5 \cdot 10^8 \text{ km}}{1500 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}} \doteq 1 \text{ d } 4 \text{ h}.$$

Michaela Urbanová

michaela.urbanova@vyfuk.org



Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kompletní výsledky najdete na <https://vyfuk.org>.

Kategorie šestých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
		5	5	6	7	7	8	7	45	183
1.–1. <i>Kryštof Bílý</i>	ZŠ Bernarda Bolzana, Tábor	4	5	6	7	7	8	7	44	176
2.–2. <i>Jan František Lukáš</i>	G Jírovcova, České Budějovice	5	5	6	7	5	8	7	43	170
3.–3. <i>Jakub Zelenka</i>	Gymnázium, Říčany	4	2	5	1	1	8	7	28	113
4.–4. <i>Matěj Novák</i>	ZŠ Hranice, Tř. 1. máje	5	–	6	–	–	8	2	21	105
5.–5. <i>Berenika Bromová</i>	ZŠ a MŠ da Vinci Dolní Břežany	–	–	–	–	–	–	–	–	100
6.–6. <i>Marek Bielezsz</i>	ZŠ a MŠ Bystřice	5	5	6	–	–	8	–	24	84
7.–7. <i>Anna Achedžak</i>	ZŠ a MŠ Červený vrch, Praha	2	3	5	2	2	–	7	21	82
8.–8. <i>Filip Kosař</i>	G, Blansko	5	5	–	–	–	8	–	18	54
9.–9. <i>Jakub Brabec</i>	ZŠ SVAT Olomouc	5	–	–	–	–	–	–	5	48
10.–10. <i>Monika Větrovcová</i>	ZŠ, MŠ a ZUŠ Jesenice	5	–	–	–	–	7	–	12	46
11.–11. <i>Ondřej Píše</i>	Gymnázium Sázavská Praha 2	5	–	–	–	–	8	–	13	43
12.–12. <i>Štěpán Lýsek</i>	Slovanské G, Olomouc	5	–	–	–	–	5	–	10	42
13.–13. <i>Klára Knopfová</i>	ZŠ J. A. Kom. Hradec Králové	5	–	–	–	–	–	–	5	35
14.–15. <i>Michaela Hanousková</i>	ZŠ a MŠ Jičín	5	5	–	–	–	–	–	10	34
14.–15. <i>Antonín Pícek</i>	G J. Wolkera, Prostějov	4	–	–	–	–	6	–	10	34
16.–16. <i>Anna Bouzková</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	32
17.–18. <i>Alex Filipi</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	31
17.–18. <i>Kristýna Zvonková</i>	ZŠ Dřevnická, Zlín	5	–	–	–	–	–	–	5	31
19.–19. <i>Karolína Tesárková</i>	G, Otrokovice	–	–	–	–	–	–	–	–	25

Kategorie sedmých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1 5	2 5	3 6	4 7	5 7	E 8	V 7	IV 45	Σ 183
1.–1. <i>Richard Menšík</i>	G, Boskovice	5	5	6	7	4	8	7	42	163
2.–2. <i>Emilie Kimmerová</i>	ZŠ a MŠ Kotlářská, Brno	5	5	6	7	7	8	6	44	154
3.–3. <i>Štěpán Zouhar</i>	G J. Blahoslava, Ivančice	5	5	5	3	5	8	6	37	145
4.–4. <i>Agnes Dostálova</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	5	5	6	7	6	8	4	41	141
5.–5. <i>Petra Linhartová</i>	ZŠ a MŠ Baška	5	2	5	7	7	8	7	41	135
6.–6. <i>Michaela Plívová</i>	ZŠ a ZUŠ České Budějovice	5	5	2	4	5	8	3	32	118
7.–7. <i>Klaudie Krumpová</i>	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	5	1	5	7	4	–	5	27	114
8.–8. <i>Petr Kysela</i>	G, Český Krumlov	4	5	6	–	–	7	7	29	111
9.–9. <i>Polína Efimova</i>	Sunny Can. International Sch.	–	–	–	–	–	–	–	–	107
10.–10. <i>Anna Závrbská</i>	G prof. J. Patočky, Praha	5	5	6	2	–	7	–	25	105
11.–12. <i>Petr Do Vu</i>	ZŠ Václavkova, Mladá Boleslav	2	4	5	3	2	3	7	26	99
11.–12. <i>Ella Heinichová</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	5	5	6	2	–	8	–	26	99
13.–15. <i>Alexandr Lukács</i>	G J. A. Komenského, Uh. Brod	5	–	6	–	–	–	3	14	93
13.–15. <i>Tomáš Wolf</i>	G, Nad Alejí, Praha	5	5	6	–	5	–	7	28	93
13.–15. <i>Viktorie Židková</i>	ZŠ a MŠ Baška	3	1	3	3	2	5	6	23	93
16.–16. <i>Anna Ličková</i>	G, Litoměřická, Praha	3	–	–	–	–	–	–	3	84
17.–17. <i>Fabián Muster</i>	G Chotěboř	5	1	3	–	–	–	–	9	82
18.–18. <i>Klára Šimková</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	5	5	5	5	4	–	7	31	80
19.–19. <i>Matěj Fouček</i>	G, Palackého 191, Ml. Boleslav	5	4	5	–	–	–	–	14	78
20.–20. <i>Pavel Do Vu</i>	ZŠ Václavkova, Mladá Boleslav	5	2	1	3	1	3	7	22	73

Kategorie osmých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1 5	2 6	3 7	4 7	5 7	E 8	V 7	IV 40	Σ 163
1.–1. <i>Lukáš Kopecký</i>	G, Litomyšl	–	3	6	7	7	8	7	38	160
2.–2. <i>Viktorie Snášelová</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	5	6	7	7	8	7	40	159
3.–3. <i>Oleg Šatánek</i>	Střední škola Hradec Králové	–	5	6	7	7	8	7	40	155
4.–4. <i>Vladimír Kotsch</i>	Gymnázium Sázavská Praha 2	–	5	6	7	4	8	7	37	152
5.–6. <i>Eva Brožovičová</i>	Podkrušnohorské G, Most	–	5	6	7	3	8	6	35	148
5.–6. <i>Amelie Zemanová</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	6	7	7	8	6	39	148
7.–8. <i>Pavel Doskočil</i>	G, Žamberk	–	5	5	7	4	7	6	34	145
7.–8. <i>Anna Přívětivá</i>	G, Litoměřická, Praha	–	5	6	–	7	–	7	25	145
9.–9. <i>Matyáš Kubíček</i>	G a ZŠ Labyrinth	–	5	6	7	7	8	7	40	140
10.–11. <i>Lucie Bělová</i>	G Opatov, Praha	–	5	2	7	5	8	7	34	139
10.–11. <i>Pavla Holečková</i>	Jungmannova ZŠ Beroun 2	–	5	6	3	2	8	7	31	139
12.–12. <i>Rafael Foltýn</i>	ZŠ Boženy Němcové, Litoměřice	–	3	4	5	5	8	6	31	127
13.–13. <i>Bartoloměj Stoklásek</i>	ZŠ Troubelice	–	3	6	7	7	4	6	33	125
14.–14. <i>Blanka Nováková</i>	G, Videňská, Brno	–	2	6	–	4	–	7	19	119
15.–15. <i>Lukáš Košovan</i>	Gymnázium Oty Pavla, Praha	–	5	6	7	2	7	6	33	114
16.–16. <i>Eva Sýkorová</i>	G a JŠ, Břeclav	–	5	5	3	4	–	7	24	113
17.–17. <i>Matěj Vacek</i>	ZŠ T. G. M. Lomnice nad Popelkou	–	4	5	2	3	–	7	21	104
18.–18. <i>Dorota Guzi</i>	ZŠ a MŠ Pastviny, Brno	–	4	5	7	4	–	5	25	90
19.–19. <i>Thea Pauzerová</i>	G Mensa, Praha	–	5	4	–	–	–	7	16	86
20.–20. <i>Karel Benedikt</i>	G, Olomouc-Hejčín	–	5	6	–	–	–	7	18	83

Kategorie devátých ročníků

jméno <i>Student</i>	škola <i>Pilný</i>	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	MFF UK	5	6	7	7	7	8	7	40	163
1.–1. <i>Matěj Dudek</i>	ZŠ Polabiny 3, Npor. Eliáše	–	5	6	7	7	8	7	40	157
2.–2. <i>Jan Horský</i>	G, Brno - Řečkovice	–	5	6	6	4	8	7	36	155
3.–5. <i>Mariana Hořínková</i>	Wichterlovo G, Ostrava	–	4	5	7	6	8	7	37	150
3.–5. <i>Vít Kupilík</i>	G, Zábřeh	–	5	5	7	4	8	7	36	150
3.–5. <i>Valentina Vykoukalová</i>	ZŠ Komenského, Zlín - Malenovice	–	5	6	7	6	8	7	39	150
6.–6. <i>Květa Bouchalová</i>	G, Olomouc-Hejčín	–	5	6	7	7	8	7	40	148
7.–7. <i>Emma Polcarová</i>	Sportovní G, Plzeňská, Kladno	–	5	6	7	7	8	7	40	147
8.–8. <i>Rozálie Michaela Furchová</i>	G, Židlochovice	–	3	6	7	7	8	7	38	145
9.–9. <i>Aneta Brzokoupilová</i>	Jungmannova ZŠ Beroun 2	–	5	6	3	2	8	7	31	139
10.–10. <i>Barbora Petrášková</i>	28. základní škola Plzeň	–	4	6	2	7	8	7	34	131
11.–11. <i>Antonín Šreiber</i>	ZŠ Skálova, Turnov	–	3	6	4	1	8	7	29	129
12.–12. <i>Viktor Novák</i>	Nový PORG, Praha	–	1	2	2	4	8	6	23	126
13.–13. <i>Karolína Vtípilová</i>	ZŠ Hrušovany nad Jevišovkou	–	5	5	7	4	–	7	28	124
14.–15. <i>Šimon Swaczyna</i>	Slovanské G, Olomouc	–	5	6	7	–	–	–	18	123
14.–15. <i>Dan Školař</i>	ZŠ a MŠ, Březová, okr. U. H.	–	5	6	1	2	8	7	29	123
16.–16. <i>Adam Houdek</i>	ZŠ a MŠ, Březová, okr. U. H.	–	–	–	–	–	–	–	–	120
17.–17. <i>Filip Brabec</i>	G T. G. Masaryka, Litvínov	–	5	3	6	7	4	6	31	116
18.–18. <i>Jaroslav Hatina</i>	15. základní škola Plzeň	–	5	–	–	–	–	–	5	115
19.–19. <i>Petr Matějka</i>	G, Brno - Řečkovice	–	4	6	7	4	8	6	35	110
20.–20. <i>Angela Poláchová</i>	Biskupské G, Brno	–	5	6	7	4	–	–	22	109



Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <https://vyfuk.org>
e-mail: vyfuk@vyfuk.org



/ksvyfuk



@ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.