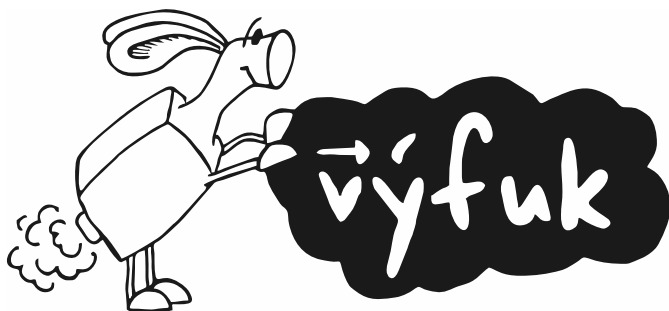




výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

v rukou držíte brožurku druhé série Výfuku, v níž vás čekají úlohy týkající se cestování výtahem, startu rakety nebo zalévání zahrádky. V experimentu se budete zabývat ohřevem vody v mikrovlnce a ve Výfučení se můžete dozvědět o Reynoldsově čísle a o odporu vzduchu.

Kromě Výfuku si můžete zasoutěžit i v týmové soutěži Náboj Junior, která se koná 22. listopadu na několika místech v ČR. Abyste se mohli soutěže zúčastnit, nemusíte cestovat nikam daleko. Stačí pouze sestavit čtyřčlenný tým z vaší školy a říct vašemu učiteli, ať vás přihlásí.

Kromě toho pro vás chystáme podzimní setkání, které se uskuteční 15.–17. listopadu v Praze. Tešit se můžete na zajímavé přednášky, venkovní i vnitřní hry, exkurze na zajímavá místa a na setkání s podobně naladěnými kamarády.

Organizátoři
vyfuk@vyfuk.org



Zadání II. série



Termín odeslání: 25. 11. 2024 20.00

Úloha II.1 ... Dlouhé vedení ⑥ ⑦

5 bodů

Viktorovi se zdálo, že jeho dlouhé elektrické vedení má moc velký odpor, a tak se rozhodl s tím něco udělat. Zvažuje dvě možnosti – buď stávající jednodrátové vedení rozdělí na dva paralelní vodiče o poloviční délce, nebo postaví zcela nové jednodrátové vedení, které by vedlo kratší trasou a mělo třetinovou délku. Pro kterou variantu se má Viktor rozhodnout, jestliže jeho cílem je co nejnižší celkový odpor? Uvažujte, že všechny použité vodiče jsou ze stejného materiálu a mají stejný průřez.



matfyz

Úloha II.2 ... Drahá láska ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

5 bodů

Adam je gentleman. Každý měsíc, který je se Soňou, jí dává růže. Pokaždé jí koupí tolik růží, kolik měsíců jsou spolu. Protože se ale sudý počet růží nedává, dostane Soňa v sudé měsíce o jednu růži více (např. ve 4. měsíci dostane 5 růží). Jestliže jedna růže stojí 75 Kč, kolik celkem utratí Adam za růže po dvou letech vztahu?

**Úloha II.3 ... Kolejní výtahy ⑥ ⑦ ⑧ ⑨**

6 bodů

Lubor rád jezdí kolejním výtahem. Když jednou cestoval z nultého do šestnáctého patra, zamyslel se, kolik jedna taková cesta vlastně stojí. Kabina výtahu má hmotnost $m_1 = 700$ kg, Lubor váží $m_2 = 80$ kg a výtah využívá protiváhu, která má hmotnost $m_3 = 500$ kg. Jedno patro je vysoké $h = 3$ m, pohybový aparát výtahu (motor, kladky, lana, kolejničky...) má účinnost $\eta = 80\%$ a kolejničky platí za kilowatthodinu elektřiny 5 Kč.

**Úloha II.4 ... Až na Měsíc ⑥ ⑦ ⑧ ⑨**

7 bodů

Viktor si vyrobil raketu vážící $m = 70$ g s raketovým motorem s palivem o zanedbatelné hmotnosti a impulsem tahu¹ $I = 6$ N·s. Po odpálení hořel raketový motor $t = 0,6$ s. Jak vysoko raketa vystoupala, než začala opět klesat? Předpokládejme kolmý start, zanedbatelný odpor vzduchu a konstantní průběh síly, kterou motor působí na raketu.

**Úloha II.5 ... Zalévání zahrady ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ★**

8 bodů

Jarda se rozhodl pokropit hadicí svou zahrádku. Proudem vody ale dosáhne maximálně do vzdálenosti $d = 12$ m.

1. Pod jakým úhlem vůči zemi (tzv. *elevačním*) Jarďa drží hadici, stříká-li právě do oné maximální vzdálenosti $d = 12$ m? Jakou rychlostí opouští voda konec hadice?
2. Aby Jarďa zvýšil rychlost vody, zmáčknul ústí hadice, které mělo původně kruhový průřez o poloměru $r = 1,0$ cm, do elipsovitého tvaru o poloosách $a = 1,4$ cm a $b = 0,5$ cm. Kolikrát rychleji začala voda z hadice proudit?
3. Do jaké vzdálenosti nyní Jarďa dostříkne?

Při počítání zanedbejte odpor vzduchu a uvažujte, že ústí hadice se nachází přibližně ve stejné výšce jako záhony, které Jarďa kropí.

Úloha II.E ... Ozáření mléko ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

8 bodů

Hedvi s Patrikem si chtěli v mikrovlnce ohřát 2 hrnky mléka najednou, nedokázali se však shodnout, jak dlouho se musí mléko ohřívát. Hedvi tvrdí, že 2 hrnky se budou ohřívát dvakrát déle než jeden hrnek, ovšem Patrik namítá, že se ohřejí za stejný čas jako jeden. Experimentálně zjistěte, kdo z nich má pravdu, a zkuste vysvětlit, proč tomu tak je. Pro měření můžete použít místo mléka vodu.



¹ Impuls síly je definován jako součin dané síly a času, po který síla působí. Tato definice však platí pouze pro sílu neměnnou s časem.

Úloha II.V ... Odporná ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Výfuček si postavil hřiště na pétanque na svém oblíbeném jezerním ostrůvku. Jelikož se ale nechtěl vždy přepravovat plaváním, napnul mezi pevninou a ostrovem dlouhé lano, k němuž si postavil vor. Nastoupil na něj a začal se přitahovat po laně k ostrovu konstantní silou F . Na začátku spustil stopky.

1. První polovinu vzdálenosti mezi pevninou a ostrovem překonal za $t_1 = 115$ s. Zrychlil a druhý úsek urazil za pouhých $t_2 = 86$ s. Kolikrát větší silou táhl Výfuček za lano ve druhé polovině cesty než původní silou F ? Kolikrát se zvýšil jeho výkon? Vor se během cesty neotáčí ani nemění svůj ponor a voda kolem něj proudí turbulentně.

2. Na ostrově začal hrát pétanque. Zdálo se mu, že jsou pétanquové koule těžší, než si pamatuje. Rozhodl se, že zkusí zjistit, zda omylem nekoupil místo koulí o hmotnosti 0,65 kg koule o vyšší hmotnosti. Po chvíli přemýšlení si uvědomil, že mu stačí pouze stopky a skládací metr.

Nejprve pomocí metru zjistil, že koule mají průměr $d = 8,0$ cm. Pak popojel na voru na mělčinu a naměřil zde hloubku $h = 2,7$ m. Nad touto hloubkou vhodil jednu z koulí svisle do vody a změřil čas, za který se potopila až na dno. Měření času několikrát zopakoval a nakonec spočetl průměrný čas $t = 1,3$ s.

Na základě Reynoldsova čísla rozhodněte, zda voda kouli při jejím ponoru obtéká laminárně, či turbulentně. Koule zrychlí na svou terminální rychlost téměř okamžitě.

3. Určete hmotnost koule.



Výfučení: Bez odporu k odporu

Úvod

Začíná podzim, který s sebou přináší spoustu větrného počasí. Stromy se pod poryvy větru ohýbají, větrné mlýny se točí jako o závod a konce kabátů kolemjdoucích zuřivě vlají. Všechny tyto větrné nepříjemnosti má na svědomí jedna často opomíjená síla. A tou je síla odporu vzduchu.

V tomto Výfučení se detailně podíváme, jak popsat fyzikálně situaci, v níž při vzájemném pohybu pevného tělesa a plynného či kapalného prostředí vzniká síla brzdící tento pohyb, běžně nazývaná jako *odporová síla*. Než se však pustíme do našeho zkoumání, musíme poznamenat, že se tematicky i úrovní jedná o rozšíření klasické školní mechaniky, tudíž je potřeba dobře zvládat témata jako energie², Newtonovy zákony³, zrychlení... Doporučujeme si tedy nejdřív tyto oblast fyziky trochu oprášit.

Terminální rychlost

Začneme nejtypičtějším případem, kdy nějaké prostředí klade pohybu určitého tělesa odpor. Představte si, že pustíme těleso, např. fotbalový míč, z velmi vysoké věže a budeme pozorovat,

²https://vyfuk.org/_media/ulohy/r12/s1/vyfucteni1.pdf

³https://vyfuk.org/_media/ulohy/r8/vyfucteni/vyfucteni_1.pdf

jak se mění jeho rychlost v čase. Pokud bychom zanedbali odpor vzduchu, víme, že rychlost v padajícího tělesa by se s časem t vyvíjela dle známého vztahu

$$v = gt,$$

kde g značí tíhové zrychlení. Vidíme tedy, že rychlost padajícího míče by měla neustále růst přímo úměrně času. Jak ale bude růst rychlost tělesa, jež se při svém pádu musí navíc prodírat vzdušným prostředím kolem sebe?

Asi si dovedeme představit, že ze začátku, kdy těleso bude teprve nabírat rychlost, bude odpor vzduchu malý (proti tělesu bude pomyslný vítr ještě slabě „foukat“). S postupem času však s rostoucí rychlostí tělesa bude růst i síla odporu, který klade okolní vzduch na padající těleso. Proti tíhové síle, která urychluje pád míče, najednou začne výrazně působit druhá síla, tzv. *odporová*. Obě síly se navzájem odečtou a jejich výslednice bude stále směřovat dolů, nicméně bude výrazně menší než sama síla tíhová.

Výsledná síla působící na těleso poté, co nabralo větší rychlost, ho bude stále urychlovat směrem dolů, ovšem nyní již s menším zrychlením (jak lze usoudit z 2. Newtonova zákona, zákona síly).

Budeme-li pozorovat míč dál, zjistíme, že bude i přes kladený odpor navyšovat svou rychlost pádu, leč pomaleji. Nakonec se v jednu chvíli musí zaručeně stát (pokud těleso dřív nedopadne na zem), že se odporová síla vzduchu působící na těleso vyrovná s tíhovou silou⁴ a výslednice obou sil se stane nulovou. V tomto momentě začne pro těleso platit 1. Newtonův zákon, zákon setrvačnosti, přestane zrychlovat a bude tudíž padat stálou rychlostí. Tato konečná rychlost, na níž se pád míče ustálí, se nazývá *terminální rychlost*.

Výpočet odporové síly

Nyní se pokusíme využít případu míče padajícího terminální rychlostí k nalezení zákona, který by nám řekl, jak velký odpor okolní prostředí na těleso vyvíjí při dané rychlosti pádu.

Nechť tedy míč padá terminální rychlostí a působí na něj odporová síla F_o , která je v takovém případě, jak již víme, rovna tíhové síle působící na míč F_g . Nechme míč při pádu urazit dráhu s a spočítáme práci W , kterou vykonala tíhová síla v tomto úseku pádu. Z definice práce dostaneme

$$W = F_g s = F_o s. \quad (1)$$

U tíhového pole platí, že práce, kterou vykoná tíhová síla, odpovídá poklesu potenciální energie tělesa. Ze zákona zachování energie víme, že o kolik potenciální energie poklesne, o tolik se musí jiná forma energie navýšit. U volného pádu se zpravidla potenciální energie tělesa mění na kinetickou. Zde to tak ovšem nefunguje, jelikož míč svou rychlost už nemění. Potenciální energie míče $W = F_g s$ tedy musí být předána něčemu jinému, a to právě okolnímu vzduchu.

Míč při svém pohybu rozrání vzduchovou bariéru a víří tak vzduch kolem sebe, jinými slovy předává mu kinetickou energii. Nyní můžeme vyslovit předpoklad, že veškerá potenciální energie W míče se přemění na kinetickou energii rozvířeného vzduchu E_k .⁵

⁴Do rovnosti bychom měli správně započítat i vztakovou sílu, ale ta je v případě míče ve vzduchu zanedbatelná.

⁵Tento předpoklad nabývá platnosti v případě, kdy těleso padá poměrně pomalu a nezahřívá se vlivem tření s okolním vzduchem. Potenciální energie se tak nemění na teplo.

Řekněme, že vzduch těsně po rozvíření nabere neznámou charakteristickou rychlost v_{vzduch} . Pokud tedy těleso rozvíří vzduchový sloupec o hmotnosti m , předá mu kinetickou energii

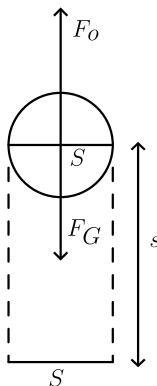
$$E_k = \frac{1}{2} m v_{\text{vzduch}}^2.$$

Z našeho předpokladu výše víme, že kinetická energie tohoto rozvířeného vzduchového sloupce je rovna změně potenciální energie tělesa W . Můžeme tedy psát

$$W = \frac{1}{2} m v_{\text{vzduch}}^2,$$

kde W lze přepsat podle vztahu (1).

$$F_o s = \frac{1}{2} m v_{\text{vzduch}}^2 \quad (2)$$



Obrázek 1: Těleso padající terminální rychlostí

Teď si zkusíme popsat hmotnost vzduchu obsaženého ve sloupci. Spadne-li náš míč o výšce s , prorazí tak celkem vzduch o objemu válce s výškou s a obsahem podstavy $S = \pi r^2$, kde r je poloměr míče. Objem takového válce spočteme jako $V = Ss$. Zároveň si vzpomeňme, že hmotnost tělesa m lze určit jako součin jeho hustoty ρ a objemu V .

$$m = \rho V = \rho S s$$

Po dosazení do předchozí rovnice (2) získáme

$$F_o s = \frac{1}{2} \rho S s v_{\text{vzduch}}^2 \Rightarrow F_o = \frac{1}{2} \rho S v_{\text{vzduch}}^2. \quad (3)$$

Těmito úpravami jsme si úspěšně vyjádřili čistě odporovou sílu F_o . Bohužel však náš vzorec obsahuje neznámou rychlost rozvířeného vzduchu v_{vzduch} , kterou jen stěží dokážeme v praxi určit, proto jako závěrečný krok učiníme jednu úvahu. Čím rychleji těleso padá a prorazí vzduch, tím rychleji musí být také vzduch odfoukáván pryč z cesty padajícímu tělesu.⁶ Znamená to

⁶Ti, kteří jsou již seznámeni s tzv. *rovnicí kontinuity*, mohou celou myšlenku lépe pochopit právě skrze tuto rovnici.

tedy, že rychlost rozvířeného vzduchu v_{vzduch} musí být přímo úměrná rychlosti pádu tělesa v . Matematicky lze tento fakt zapsat rovnicí přímé úměrnosti

$$v_{\text{vzduch}} = kv,$$

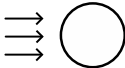
kde $k \in \mathbb{R}^+$ je číselný (bezrozměrný, tzn. nemá jednotku) koeficient přímé úměrnosti. Dosadíme-li tento vztah do rovnice pro odporovou sílu (3), získáme vzorec

$$F_o = \frac{1}{2} \rho S k^2 v^2.$$

Číslo k^2 je zvykem označovat písmenem C .

$$F_o = \frac{1}{2} \rho S C v^2$$

Odvodili jsme nyní zákon, který se nazývá *Newtonův zákon odporu*. Určuje sílu, kterou klade tekutina⁷ o hustotě ρ odpor tělesu pohybujícímu se v tomto tekutém prostředí rychlostí v . Veličina S pak odpovídá tzv. *obsahu průřezu*, což je plocha, kterou zabírá těleso z pohledu ve směru pohybu. Číslo C se nazývá *Newtonův odporový koeficient* a je dáno čistě tvarem tělesa a směrem dopadu částic tekutiny na těleso. Např. pro tělesa s více aerodynamickým tvarem je tento koeficient velmi malý, menší než 1, kdežto kupříkladu pro padák toto číslo spolehlivě přesahuje hodnotu 1. Odporové koeficienty různých těles můžete vidět na následujícím obrázku.

Tvar		C
	koule	0,47
	polokoule	0,42
	krychle	1,05
	kužel	0,59

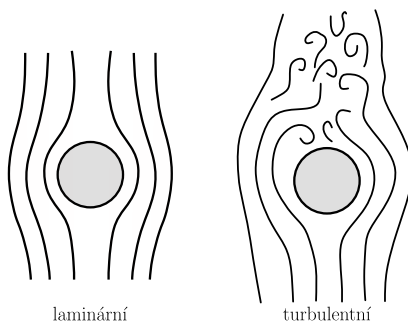
Obrázek 2: Newtonův odporový koeficient pro různá tělesa

Laminární vs. turbulentní proudění

Doteď jsme uvažovali takovou tekutinu (konkrétně vzduch), která se při průletu nějakého tělesa snadno rozvíří. Takové vířivé proudění se nazývá *turbulentní*. Nicméně asi si dovedeme představit, že existují také tekutiny, které se dají rozvířit těžko. Příkladem může být včelí med. Když vhodíme kuličku do sklenice s medem, bude padat, ale extrémně pomalu a rozhodně kolem ní

⁷Připomínáme, že *tekutiny* je souhrnný název pro kapaliny a plyny.

nebude vznikat žádné víření. Proudění medu kolem kuličky má velmi blízko k tzv. *laminárnímu proudění*, při němž se částice kapaliny pohybují po rovnoběžných přímkách.⁸



Obrázek 3: Porovnání laminárního a turbulentního proudění

Jak ale vzniká odporová síla zde? Tekutiny jako med se vyznačují tím, že se jejich částice přitahují výrazně silněji než částice většiny jiných tekutin, třeba vody. Při potápění musí kulička překonávat tyto přitažlivé síly částic medu, které jsou primárním faktorem ztráty energie kuličky. Tímto mechanismem vzniká odporová síla v medu. Ten je ovšem zcela odlišný, nežli mechanismus víření vzduchu popsany v předešlé kapitole. Dává smysl, že zákon, který bude popisovat odporovou sílu při pohybu v takových prostředích, bude vypadat jinak, než jsme zatím výše odvodili. V obecném formátu by byl takový zákon nesmírně složitý, proto si jen bez odvození uvedeme jeho speciální případ pro kouli o poloměru r .

$$F_o = 6\pi\eta r v$$

Tento vzorec bývá nazýván jako *Stokesův zákon* a popisuje odporovou sílu tekutin, které určité kulové těleso obtékají přibližně laminárně. Veličina v zde opět značí rychlost koule vůči okolnímu prostředí a η je nová veličina charakterizující tekutinu. Souvisí právě s tím, jak silné jsou v ní mezičásticové síly, a říká se jí *dynamická viskozita*. Její hodnoty pro některé tekutiny můžete najít v tabulce 1.⁹

tekutina	$\frac{\eta}{\text{mPa}\cdot\text{s}}$
voda	1
slunečnicový olej	50
jogurt	150
med	2 000 – 10 000

Tabulka 1: Dynamická viskozita některých tekutin v jednotkách milipascalsekunda (mPa·s)

Vraťme se ale zpátky ke Stokesově zákonu a všimněme si, že odporová síla je tím větší, čím větší je

⁸ Částice medu samozřejmě musí kuličku nějak obcházet, proto se po dokonalých přímkách pohybovat nemohou. Nicméně nemají k tomu daleko, proto se i takovému proudění pro zjednodušení říká laminární.

⁹ <https://oilviscositychart.com/learn/viscosity-list.php>

- rozměr kuličky,
- rychlost kuličky,
- mezičásticová přitažlivost v tekutině (viskozita).

První dva body jsou podobné jako u Newtonova zákona odporu s tím rozdílem, že zde ve vzorci vystupuje poloměr kuličky místo obsahu průřezu a první mocnina rychlosti místo druhé. Poslednímu bodu také rozumíme. Větší mezičásticové síly je těžší překonat a lépe tak brání tělesu v pohybu – kladou větší odpor.

A jak je rozeznat?

Představili jsme si dva vztahy pro odporovou sílu, z nichž každý přichází vhod v jiném případě. Stokesův zákon se užívá, když tekutina kolem sledovaného tělesa proudí spíše laminárně, kdežto Newtonův zákon má užití pro proudění více turbulentního charakteru. Otázkou ale zůstává, jak tyto dva případy od sebe rozeznat.

Řekli jsme si, že pro tekutiny s větší viskozitou η bude proudění spíše laminární. Naopak pro menší η bude tekutina proudit turbulentně. Zároveň je nám jasné, že čím větší bude šířka tělesa d (z pohledu směru pohybu), tím méně aerodynamické bude a bude tak vytvářet větší víry. Proudění tedy bude pro velká d víc turbulentní. Nakonec, pokud zvýšíme rychlost pohybu tělesa v tekutině v , začne ji více vířit a proudění tak získá turbulentní charakter.

Všechny tyto poznatky lze formulovat pomocí matematiky. Je-li výraz

$$\frac{vd}{\eta}$$

hodně malý, proudění se chová spíše laminárně. Naopak velkým hodnotám tohoto zlomku odpovídá proudění turbulentní. Přenásobíme-li výraz hustotou prostředí (ρ), dostaneme tzv. *Reynoldsovo číslo*.

$$\text{Re} = \frac{\rho v d}{\eta}$$

Toto číslo rozhoduje o tom, zda je proudění laminární či turbulentní. Předem upozorňujeme, že slouží pouze jako hrubý odhad, mezi těmito dvěma typy neexistuje ostrá hranice. Nicméně pokud bychom si ji měli pro lepší představu stanovit, byla by řádově někde na tisících ($\text{Re} \sim 10^3$). Reynoldsovo číslo neuvazuje tvar tělesa, který také rozhoduje o tom, jak tekutina kolem něj proudí. Proto se tato hranice může lehce lišit u odlišných typů těles.¹⁰ Abychom tedy mohli bezpečně prohlásit, že je proudění kolem určitého tělesa laminární, musí vyjít hodnota Reynoldsova čísla mnohonásobně menší než 1 000, a naopak pro čistě turbulentní proudění musí toto číslo silně převyšovat hodnotu 10 000. Pro představu jsme uvedli některé klasické případy a jejich Reynoldsova čísla v tabulce 2.¹¹

Závěr

Nyní jste už seznámeni s problematikou, které se základoškolská i středoškolská fyzika mnohdy vyhýbá. Doufáme tedy, že až příště budete potřebovat nezanedbat v nějakém příkladu odpor

¹⁰Při našem výkladu uvažujeme tělesa, která jsou přibližně stejně široká jako dlouhá. Pro úzká a zároveň protáhlá tělesa (např. křídlo letadla) se musí vyhodnocovat ještě jiné kritérium související s jejich délkou.

¹¹<https://www.pnas.org/doi/full/10.1073/pnas.0602043103>,
<https://vesmir.cz/cz/casopis/archiv-casopisu/2017/cislo-12/hmyz-jako-dokonalý-letací-stroj.html>

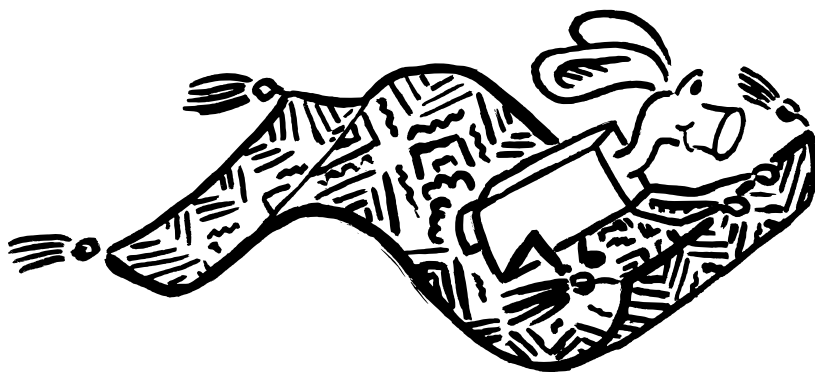
objekt	Re
plavající bakterie	10^{-4}
letící moucha	10^1
letící vážka	10^3
plavající člověk	10^6
letící letadlo	10^7
plující Titanic	10^9

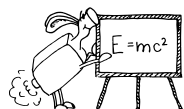
Tabulka 2: Řádový odhad Reynoldsova čísla některých objektů

vzduchu, uvědomíte si, že díky znalostem nabytým v tomto Výfučtení to není nic nemožného a že dokážete do svých kalkulací započítat i ten zapeklitý odpor!

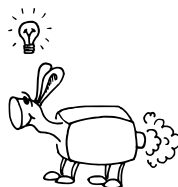
Michal Stroff

michal.stroff@vyfuk.org





Řešení I. série

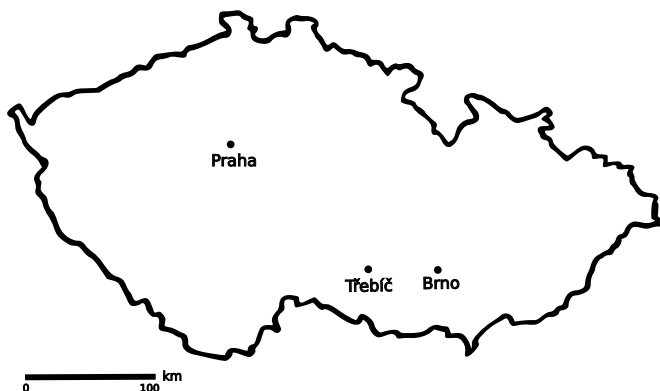
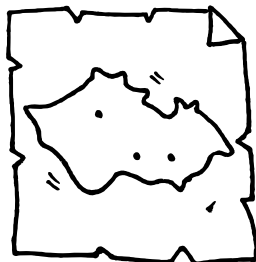


Úloha I.1 ... Přímočará

5 bodů; průměr 4,28; řešilo 106 studentů

Organizátoři se chystají na akci Výfuku. Viktor však nechtěl ostatním organizátorům usnadnit cestu, a proto jim neprozradil přesnou polohu setkání. Místo toho jim pouze sdělil vzdálenost místa srazu od jejich aktuální polohy „vzdušnou čarou“. Soňa se nachází v Praze a ví, že od ní je neznámé město vzdáleno 166 km. Od Hedvi v Třebíči je zase místo setkání ve vzdálenosti 116 km a od Adama v Brně je to 100 km daleko. Ve kterém městě se organizátoři potkají?

Poznámka: Je možné, že se vám kvůli technickým nepřesnostem nepodaří určit správné město. Zaměřte se proto primárně na popis postupu řešení.



Obrázek 4: Mapa České republiky s vyznačenými městy

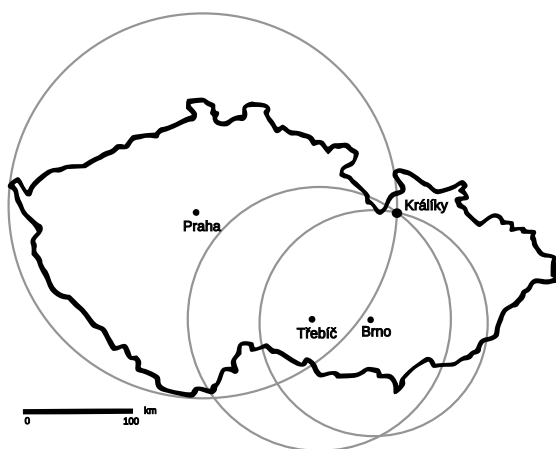
Ze zadání známe pouze vzdálenosti neznámého místa od daných měst, ale už ne směry, kterými se organizátoři musí vydat. Úlohu je tudíž potřeba řešit graficky pomocí nějakého geometrického objektu, jenž vyznačuje všechna možná místa se stejnou vzdáleností od určitého bodu. Tímto objektem je samozřejmě kružnice. Například kružnice o poloměru 100 km se středem v Brně nám označí všechna místa, která mají od Brna vzdálenost 100 km. A právě jeden z těchto bodů na kružnici bude odpovídat místu setkání. Abychom zjistili, který přesně, musíme stejný postup rýsování kružnic opakovat i pro další města.

Místo setkání tedy najdeme geometricky jako průsečík tří kružnic. Středem každé kružnice bude jedno z výchozích měst a poloměrem bude vzdálenost, kterou mají organizátoři z daného

města cestovat. Naši konstrukci jsme schopni provádět pouze na papírové mapě, poloměry kružnic je tedy potřeba vhodně přepočítat.

Pro zjištění poloměrů kružnic, které musíme narýsovat, využijeme grafické měřítko mapy. Má-li na papíře délku např. 2,0 cm a představuje vzdálenost 100 km ve skutečnosti, pak 1 cm na mapě odpovídá $100/2 \text{ km} = 5000000 \text{ cm}$ ve skutečnosti. Měřítko mapy je tedy $1 : 5000000$. Z toho zjistíme, že 1 km ve skutečnosti odpovídá $1/50 \text{ cm}$ na mapě, tudíž třeba vzdálenost místa setkání od Prahy, 166 km, bude na takové mapě $166 \cdot 1/50 \text{ cm} \doteq 3,3 \text{ cm}$. Obdobně převedeme i zbylé vzdálenosti.

Po narýsování všech tří kružnic a nalezení jejich společného průsečíku dokážeme pomocí mapy s větším měřítkem určit, které město se v daném bodě nachází. Průsečík lze také nalézt například pomocí programu Map Developers.¹²



Obrázek 5: Mapa České republiky s vyznačenými městy a nalezeným místem

Organizátoři se mají s Viktorem setkat ve městě Králíky.

Natálie Lászlóová
natalie.laszloova@vyfuk.org

Alena Mouchová
alena.mouchova@vyfuk.org

Úloha I.2 ... A žere a žere

5 bodů; průměr 4,09; řešilo 261 studentů

Soňa, unavená po celodenní práci, si šla doplnit energii jídlem. Vzala si talíř červeného zelí, misku bílého zelí, kus kachny, chléb se škvarkovou pomazánkou a koláček. Na kolik způsobů může celou svou hostinu sníst, liší-li se jednotlivé způsoby pouze pořadím těchto pěti jídel? Má to však háček, neboť pokud sní před a zároveň po sladkém jídle něco slaného, bude Soni špatně. Z kolika variant jí špatně nebude?



¹²<https://www.mapdevelopers.com/draw-circle-tool.php>

Nejprve nás zajímá počet způsobů, kterými může Soňa svou hostinu sníst, tedy počet různých kombinací pořadí daných pěti jídel. Jedno unikátní pořadí jídel se nazývá *permutace*. Počet permutací n -prvkové skupiny $P(n)$ lze spočítat jako tzv. *faktoriál* čísla n .

$$P(n) = n!$$

Faktoriál se značí pomocí vykřičníku, a ačkoliv může na první pohled vypadat děsivě, není čeho se bát. Jeho definice je poměrně jednoduchá. Faktoriál čísla n je definován jako součin všech přirozených čísel od 1 do n (včetně). Matematicky tuto definici lze zapsat následovně¹³

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Takový výpočet má dobré opodstatnění. Chceme-li seřadit skupinu n různých prvků, můžeme na první místo vybrat kterýkoliv z nich, na druhé místo však již první prvek dát nelze – vybíráme tedy jen z $n - 1$ prvků a tak dále. Násobení se objevuje ve výrazu proto, že pro každý z n prvků máme $n - 1$ možností, jak dostat unikátní pořadí, čili $n \cdot (n - 1)$ možností celkem pro první dvě místa. Pro všech n míst máme celkově $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n = n!$ možností.

Jelikož pracujeme se skupinou pěti jídel, bude počet permutací této skupiny

$$P(5) = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Soňa může svou hostinu sníst 120 různými způsoby.

Dále nás zajímá, po kolika z těchto 120 permutací Soni nebude špatně. Jelikož jí bude špatně vždy, když před a zároveň po sladkém jídle jedla něco slaného, zůstává jedinou možností, aby si dala sladké jídlo buď hned na začátku své hostiny, tedy jako první v pořadí, nebo na konci jako úplně poslední.

Když určíme, že si Soňa dá koláček jako první jídlo, zbudou nám už jen čtyři další jídla, která musíme seřadit. Pokud chceme vědět, kolika způsoby je můžeme seřadit, stačí nám jen spočítat počet permutací čtyřprvkové skupiny, tedy

$$P(4) = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Teď už víme, že po minimálně 24 z původních 120 permutací jídel Soni nebude špatně. Zbývá nám již jen možnost, že si Soňa koláček dá nakonec, tedy až po všech ostatních jídlech. V tomto případě také zbývají jen čtyři jídla k libovolnému seřazení, takže počet kombinací jejich pořadí bude pořád stejný, a to 24. Výsledný počet permutací N , po kterých Soni nebude špatně, tedy bude dvojnásobkem tohoto čísla

$$N = 2P(4) = 2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48.$$

Soni nebude špatně po 48 ze 120 možných uspořádání jídel.

Vojtěch Kubrycht

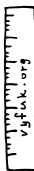
vojtech.kubrycht@vyfuk.org

¹³Znak Π (velké řecké pí) se používá jako efektivní zápis pro násobení několika členů za sebou. Technicky funguje tak, že do výrazu za znakem Π (v tomto případě k) se postupně dosazují za k všechna přirozená čísla od počáteční hodnoty uvedené pod znakem Π (pro nás $k = 1$) až do koncové hodnoty uvedené nahoře (n). Spočtou se hodnoty daného výrazu pro všechna patřičná k a následně se mezi sebou všechny spočtené hodnoty vynásobí.

Úloha I.3 ... Nepřesné pravítko

6 bodů; průměr 4,63; řešilo 204 studentů

Viktor si koupil plastové pravítko dlouhé $l = 50$ cm. Předpokládejme, že tato vzdálenost odpovídá vzdálenosti mezi ryskami s označením „0 cm“ a „50 cm“ při teplotě $t_1 = 25$ °C. Jak se změní tato vzdálenost, pokud bude Viktor měřit na Antarktidě při teplotě $t_2 = -60$ °C? Koeficient teplotní délkové roztažnosti plastu, z něhož je pravítko vyrobeno, je $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$. Srovnajte svůj výsledek s typickou nepřesností uvažovanou u pravítka s nejmenším dílkem stupnice o velikosti 1 mm.



Pevné látky podléhají teplotní roztažnosti, kterou můžeme popsat lineárním vztahem pro změnu délky

$$\Delta l = \alpha l \Delta t = \alpha l (t_2 - t_1).$$

Jelikož všechny veličiny, jež vystupují ve vzorci výše, máme zadány, stačí pouze dosadit numerické hodnoty a získáme výsledek. Mohlo by se zdát, že bude třeba převádět jednotky na základní (tedy metry a kelviny), ovšem zrovna v tomto případě si takovou práci můžeme ušetřit. Celsiova stupnice má totiž stejnou velikost jednoho dílku jako Kelvinova, tedy při rozdílu dvou teplot nezáleží na tom, zda zvolíme kelviny, nebo stupně Celsia. Podobně i délku l nemusíme z centimetrů převádět, pokud se spokojíme s tím, že nám změna délky pravítka Δl vyjde opět v centimetrech. Můžeme tedy počítat přímo s hodnotami ze zadání.

$$\Delta l = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1} \cdot 50 \text{ cm} \cdot (-60^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C}) \doteq -1,1 \text{ cm}$$

Délka pravítka se změní asi o jeden centimetr. Protože se Viktor přesunul z teplejšího prostředí do chladnějšího, bude se jednat o zkrácení.

Nepřesnost způsobenou roztažností si vyjádříme tzv. *relativně*, tedy jako poměr $u = |\Delta l/l|$ ¹⁴. Pro pravítko na Antarktidě dostaneme

$$u = \left| \frac{\Delta l}{l} \right| = \left| \frac{\alpha l (t_2 - t_1)}{l} \right| = |\alpha (t_2 - t_1)| \doteq |-0,021| = 2,1 \, \%.$$

Povšimněme si, že jelikož se délka l ve vzorci pokrátká, relativní nepřesnost měření na ní nezávisí. Pro jakékoliv pravítkem měřené délky je tedy relativní nepřesnost stejná.

Při měření standardním pravítkem je většinou zvykem brát hodnotu nepřesnosti (resp. přesnosti) jako polovinu nejmenšího dílku na stupnici měřidla. V případě našeho pravítka tedy budeme uvažovat typickou nepřesnost měření $\Delta = 0,5 \text{ mm} = 0,05 \text{ cm}$. Tentokrát ale už bude relativní nepřesnost u' záviset na tom, jakou délku d měříme.

$$u' = \frac{0,05 \text{ cm}}{d}$$

Nyní můžeme zjistit, při jaké délce bude typická nepřesnost pravítka shodná s nepřesností způsobenou teplotní roztažností. Takovou podmínku lze vyjádřit následovně:

$$u = u' \Rightarrow 0,021 = \frac{0,05 \text{ cm}}{d} \Rightarrow d \doteq 2,4 \text{ cm}.$$

Pokud budeme měřit kratší vzdálenost než 2,4 cm, bude nepřesnost způsobená roztažností menší. Jakmile však začneme měřit větší vzdálenosti, nepřesnost standardního pravítka bude znatelně menší.

Lukáš Linhart

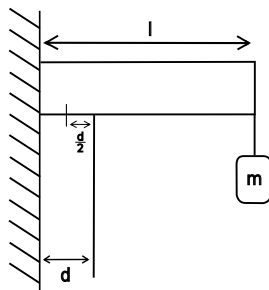
lukas.linhart@vyfuk.org

¹⁴Poměr dáváme do absolutní hodnoty z toho důvodu, že změna délky může být obecně kladná i záporná, kdežto relativní nepřesnost má smysl definovat pouze jako kladnou.

Úloha I.4 ... Pevný vrut

7 bodů; průměr 5,78; řešilo 148 studentů

Jirka se rozhodl pořídit si na kolej boxovací pytel. Narazil však na problém, jak pytel správně upevnit. Nakonec přišel s řešením pomocí jednoduché aparatury sestávající ze dvou ocelových trámů o délce $l = 1\text{ m}$ se zanedbatelnou hmotností. Jeden trám připevnil svisle na zeď a druhý kolmo na první pomocí jednoho vrutu, jak lze vidět na obrázku. Na konec druhého trámu chtěl pověsit boxovací pytel. Vtom však zaváhal, zda takovou zátěž spojovací vrut vydrží. Poradte Jirkovi, jakou maximální hmotnost může pytel mít, jestliže vrut má obsah průřezu $S = 0,5\text{ cm}^2$, mez pevnosti v tahu $\sigma = 420\text{ MPa}$ a trám má šířku $d = 10\text{ cm}$.



Abychom dokázali pochopit, jakou mechanikou se řídí celá situace, musíme si představit hraniční případ, v němž vrut napětí nevydrží a praskne. Těsně po přetržení vrutu by se horní trám začal otáčet kolem hrany svislého trámu, choval by se tedy jako dvojzvrtná páka. Hrana svislého trámu funguje jako opěrný bod, kolem něhož se vodorovný trám otáčí.

Nyní se vraťme trochu zpátky a ponechme vrut ještě nepřetržený. Hledáme-li maximální zátěž na konci trámu, musíme nejprve určit maximální sílu $F_{\max}$, kterou ještě můžeme tahat za vrut, aniž by se přetrhl. Jelikož se následně páka nehýbe, můžeme z rovnováhy na páce určit maximální hmotnost pytle M .

Jak můžeme vidět z obrázku, první rameno páky, které přísluší síle vrutu $F_{\max}$, má délku $d/2$. Druhé rameno, spojené s tíhou pytle Mg ($g \doteq 10\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ značí tíhové zrychlení), je dlouhé $l - d$. Rovnováha na páce tak bude vyjádřena rovnicí

$$F_{\max} \cdot \frac{d}{2} = Mg \cdot (l - d).$$

Teď už jen šikovnými úpravami vyjádříme hmotnost pytle M

$$M = \frac{F_{\max} \cdot d/2}{g(l - d)} = \frac{F_{\max}}{2g(l/d - 1)}. \quad (4)$$

Poslední, co potřebujeme znát k vyřešení úlohy, je síla $F_{\max}$. K jejímu určení nám poslouží materiálová konstanta zvaná *mez pevnosti v tahu*. Tato veličina odpovídá maximálnímu tlaku, který můžeme tahem na daný materiál vyvíjet, aniž by povolil a přetrhl se. Poněvadž se jedná o tlak, musíme pro zjištění síly tuto mez pevnosti v tahu σ přenásobit plochou, na niž síla $F_{\max}$ působí kolmo. Touto plochou je právě průřez vrutu o obsahu S . Maximální síla tahu tak dostává tvar

$$F_{\max} = \sigma S.$$

Následně můžeme dosadit toto vyjádření síly $F_{\max}$ do vztahu (4) a obdržíme

$$M = \frac{\sigma S}{2g(l/d - 1)}.$$

Nyní už stačí jen dosadit zadané hodnoty a získáme maximální možnou hmotnost Jirkova pytle.

$$M = \frac{420 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{2 \cdot 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot \left(\frac{1 \text{ m}}{0,1 \text{ m}} - 1 \right)} \doteq 117 \text{ kg}$$

Vzhledem k tomu, že náš model má jisté nedostatky (např. jsme zanedbali hmotnost trámů) a zadané hodnoty nejsou uvedené moc přesně, je bezpečné prohlásit, že bude-li mít pytel hmotnost do 100 kilogramů, konstrukce jeho zavěšení vydrží. Samozřejmě za předpokladu, že vydrží i ostatní části konstrukce.

Michal Stroff

michal.stroff@vyfuk.org

Úloha I.5 ... Čepování beze ztrát

8 bodů; průměr 4,64; řešilo 145 studentů

Vojta si chtěl natočit vodu z kohoutku. Všiml si však, že průměr kohoutku je dvakrát větší než průměr hrdla jeho lahve. Jelikož nechce plýtvat vodou, vymyslel elegantní způsob, jak do lahve napustit vodu beze ztrát. Umístil lahev do výšky h pod kohoutek a pustil vodu. Proud vody se při pádu zúžil a perfektně beze zbytku se napasoval do hrdla lahve.



1. Kolikrát menší je obsah průřezu hrdla lahve než obsah průřezu kohoutku?
2. Vojta jako znalý technik ví, že z kohoutku vytéká voda rychlostí v svisle dolů. Vyjádřete v násobcích této rychlosti rychlost, kterou voda padá do hrdla lahve.
3. Stejně jako Vojta určete a obecně vyjádřete pomocí rychlosti v a tíhového zrychlení g výšku h , ve které se nacházel kohoutek nad hrdlem lahve.

Uvažujte, že se proud vody zužuje osově symetricky a nevznikají v něm žádné bublinky či mezery.

1. Průměr kohoutku d_k je dvakrát větší než průměr hrdla lahve d_l , tedy $d_k = 2d_l$. Obsah průřezu kohoutku S_k je tedy čtyřikrát větší než obsah průřezu hrdla lahve (velikost plochy otvoru v láhvi) S_l , protože plocha kruhu se mění s druhou mocninou průměru.

$$\frac{S_k}{S_l} = \frac{\pi (d_k/2)^2}{\pi (d_l/2)^2} \Rightarrow \frac{S_k}{S_l} = \left(\frac{d_k}{d_l}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_k}{S_l} = \left(\frac{2 \cdot d_l}{d_l}\right)^2 = 2^2 = 4$$

2. K vyjádření rychlosti využijeme vlastnosti ustáleného proudění, při kterém zůstává konstantní tzv. *objemový průtok*.

Proud vody vytéká z kohoutku a následně volně padá, mění se jeho rychlost a také průřez v závislosti na výšce. Pro ustálené proudění platí, že kolik vody vyteče z kohoutku za daný čas, tolik vody musí za ten stejný čas například dopadnout do lahve, jinými slovy objemový průtok je v každé výšce stejný. Objemový průtok lze vyjádřit jako součin obsahu průřezu dané části proudu a rychlosti vody v tomto místě proudu, $Q = Sv$. Navazující tvrzení, že je tento součin všude konstantní, bývá nazýváno jako *rovnice kontinuity*.

$$Q = Sv = \text{konst}$$

Pokud dojde ke zmenšení průřezu proudu vody, musí se rychlost vody zvýšit, aby se zachoval konstantní objemový tok. Z předchozí podúlohy jsem zjistili, že průřez hrdla lahve je čtyřikrát menší než průřez kohoutku

$$S_l = \frac{1}{4} S_k.$$

Jelikož je objemový tok všude stejný, musí platit, že $S_k v = S_1 v_1$, kde v_1 značí rychlost, kterou voda dopadá do lahve

$$S_k v = \frac{1}{4} S_k v_1 \Rightarrow v_1 = 4v.$$

Rychlost vody při dopadu do hrdla lahve je čtyřikrát větší než rychlost, kterou voda vytéká z kohoutku.

3. Pro výpočet výšky využijeme zákona zachování mechanické energie. Na začátku před pádem má voda určitou potenciální i kinetickou energii. Potenciální energie se během pádu postupně mění na kinetickou energii až do momentu dopadu do láhve, kdy již má voda pouze kinetickou energii.

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g h = \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow v^2 + 2 g h = v_1^2$$

Opět z předchozí podúlohy dosadíme rychlost v_1 .

$$v^2 + 2 g h = (4v)^2 \Rightarrow h = \frac{15v^2}{2g}$$

Právě takto nízko pod kohoutek Vojta láhev umístil.

Natálie Lászlóová

natalie.laszloova@vyfuk.org

Úloha I.E ... Nostalgická

8 bodů; průměr 4,92; řešilo 131 studentů

Anežka procházela kolem své bývalé školy, dívala se na okna v posledním patře a vzpomínala, jak z nich se spolužáky házeli na protější budovu podtácky. Přitom se zamyslela, jak vysoko vlastně okna jsou. Budte jako Anežka! Ve svém okolí najděte nějakou vysokou stavbu (například panelový dům, vysílač, kostelní věž nebo rozhlednu) a alespoň třemi různými způsoby změřte její výšku. Následně zkuste srovnat přesnost jednotlivých metod měření.

Teorie

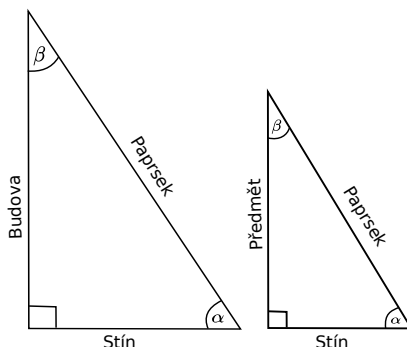
Metod měření výšky je mnoho, pro náš experiment jsme však zvolili tři z těch nejjednodušších.

- První metodou je prosté změření výšky budovy pomocí pásma či jiného měřidla. U tohoto měření si musíme dát pozor na to, aby naše měřidlo bylo orientované kolmo k zemi a aby bylo dostatečně napnuté, jinak náš výsledek bude ovlivněn zbytečnými nepřesnostmi.
- Druhou možností je využít znalostí o volném pádu, kdy uvažujeme padající těleso, na které působí pouze tíhová síla (odporovou sílu prostředí zanedbáváme). Tělesa se v takovéto situaci pohybují po přímce rovnoměrně zrychleným pohybem. Pro dráhu uraženou tělesem při volném pádu platí vztah

$$s = \frac{1}{2} g t^2, \quad (5)$$

kde dráha s odpovídá výšce měřené budovy, čas t době pádu tělesa a $g \doteq 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ značí tíhové zrychlení.

- Ve třetí metodě budeme využívat délku stínů. Tento způsob je založen na podobnosti trojúhelníků. Předpokládáme, že na Zemi dopadají sluneční paprsky rovnoběžně pod stejným úhlem na všechny objekty, které mají stejnou zeměpisnou šířku. To také znamená, že stíny těchto objektů budou vytvářet tzv. *podobné trojúhelníky*.¹⁵



Obrázek 6: Podobné trojúhelníky vytvořené budovou a předmětem

Pokud je daný objekt (například budova) kolmý k zemi, můžeme stíněnou oblast převést do dvojrozměrného prostoru jako pravoúhlý trojúhelník. Sluneční paprsek jdoucí od vrcholu budovy k zemi odpovídá přeponě a stín s budovou vytvářejí odvěsny. Díky tomu platí, že poměr výšky budovy a délky stínu je stejný jako poměr výšky předmětu a délky stínu předmětu o známé výšce. Výšku budovy pak pomocí známých informací můžeme vyjádřit následovně:

$$\text{výška budovy} = \frac{\text{délka stínu budovy}}{\text{délka stínu předmětu}} \cdot \text{výška předmětu}. \quad (6)$$

Výsledky měření

Měření jsme prováděli na střeše dvoupatrového domu s rovnou střechou. Tento dům sousedí s loukou s víceméně rovným terénem.

- Při měření výšky budovy pomocí pásma jsme na jeho konec připevnili 5 kg těžké závaží, které udržovalo pásmo co nejvíce napnuté. Střecha domu nemá převis a stěny domu jsou holé. Při měření jsme si museli dát pozor, aby pásmo bylo po celou dobu přilehlé ke stěně domu. Pro větší přesnost měření jsme výšku budovy pomocí pásma měřili třikrát. Po každém pokusu jsme pásmo smotali a znovu nastavili. Výsledky jsou zaznamenány v tabulce 3. Spočítáme-li jejich aritmetický průměr, dostaneme pravděpodobnou výšku budovy s

$$s = \frac{601 + 601 + 602}{3} \text{ cm} \doteq 6,01 \text{ m}.$$

¹⁵Pokud jste o tomto termínu ještě neslyšeli, doporučujeme podívat se na <https://www.youtube.com/watch?v=MUAhK-dqz8s>.

číslo měření	<u>výška budovy</u> cm
1	601
2	601
3	602

Tabulka 3: Výška budovy měřená pomocí pásma

- Pro druhý způsob měření jsme si připravili 8 přibližně stejně těžkých kamínků a kameru. Protože je dvoupatrový dům relativně nízký, stopovat čas ručně by bylo značně nepřesné. Proto jsme se rozhodli pád kamínků natočit a video následně analyzovat v programu Tracker.¹⁶ Kamínky jsme pouštěli ze stejného místa, ve kterém jsme začínali měření pásmem. Naměřené časy pádu jsou zaznamenány v tabulce 4.

číslo měření	<u>čas pádu</u> s
1	0,97
2	1,08
3	1,18
4	1,16
5	1,03
6	1,14
7	1,31
8	0,98
průměr	1,11

Tabulka 4: Naměřené časy pádu jednotlivých kamínků

Po dosazení námi změřeného průměrného času z tabulky 3 do vzorce (5) nám vyjde výška budovy v metrech

$$s = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 1,11^2 \text{ m} \doteq 6,04 \text{ m}.$$

- Na třetí metodu jsme potřebovali krom délky stínu budovy zjistit i výšku nějakého jiného předmětu a délku jeho stínu. Pro tento účel jsme zvolili vodováhu, která má na sobě pravítko začínající a končící přesně na jejích koncích. Rovnou jsme tedy znali její délku 120 cm. Díky využití právě vodováhy jako předmětu o známé výšce jsme se také mohli ujistit, že stojí kolmo k zemi. Délky stínů vrhaných vodováhou a domem bylo třeba změřit co nejrychleji po sobě, aby se úhel dopadu slunečních paprsků změnil co nejméně. Stín vodováhy měl délku 115 cm, délka stínu domu byla 580 cm. Tyto hodnoty dosadíme v základních jednotkách (tedy v metrech) do vzorce (6) a spočítáme výšku budovy s

$$s = \frac{5,8}{1,15} \cdot 1,2 \text{ m} \doteq 6,05 \text{ m}.$$

¹⁶<https://physlets.org/tracker/>

Diskuze a závěr

První metodou jsme naměřili, že budova má výšku 6,01 m, druhou metodou 6,04 m a třetí metodou 6,05 m. Malý rozptyl výsledných hodnot značí nízkou nepřesnost měření – řádově ji můžeme odhadnout na pár centimetrů. Různé metody lze posuzovat z mnoha hledisek, přičemž jedním z nich je variabilita výsledků. U první metody máme výsledky téměř totožné, ovšem u druhé metody jsme naměřili nejmenší čas 0,97 s a největší 1,31 s, což není úplně malý rozdíl. Můžeme tedy říci, že druhá metoda je méně přesná. Lze se domnívat, že tato nepřesnost byla pravděpodobně zapříčiněna zanedbáním odporu vzduchu a špatným odhadem času vypuštění a dopadu kamene, který má pak kvůli nízkému celkovému času pádu relativně velký vliv na výsledky. Třetí metodou jsme měřili pouze jednou, takže nepřesnost mezi jednotlivými měřeními posoudit nemůžeme. Za faktor, který nejvíce přispívá k nepřesnostem této metody, považujeme nerovnosti povrchu, na který stín dopadá. Za nejpresnější metodu tedy považujeme první metodu – měření výšky budovy pásmem. Výsledky této metody byly velmi konzistentní a její nepřesnost závisí pouze na přesnosti měřidla a lidské manipulaci, což je při větší zručnosti a pečlivosti snadno odstranitelný faktor. Nevýhoda této metody spočívá v omezeném rozsahu výšky měřené budovy. Pro vyšší stavby už by nám délka pásma nemusela stačit.

Alena Mouchová

alena.mouchova@vyfuk.org

Úloha I.V ... Biologický experiment

7 bodů; průměr 4,29; řešilo 91 studentů

Výfuček při práci na své zahrádce našel podivného brouka a rozhodl se jej prostudovat. Položil ho proto na stůl a podíval se na něj skrz lupu tvořenou tenkou spojnou čočkou s ohniskovou vzdáleností $f = 10$ cm.

1. V jaké vzdálenosti od lupy se vytvořil obraz, jestliže se lupa nacházela ve vzdálenosti $a = 6$ cm nad broukem? Jedná se o skutečný nebo zdánlivý obraz? Výfuček namířil lupu tak, že se brouk nacházel v blízkém okolí osy čočky a zároveň byl v lupě vidět celý.
2. Jak široký byl tento obraz, pokud Výfuček změřil pravítkem, že brouk má šířku $y = 14$ mm?
3. Říká se, že pro pozorování předmětů pouhým okem je optimální vzdálenost $L = 25$ cm. Jaká je úhlová velikost brouka při takovém pozorování bez lupy? (Úhlová velikost se zde vztahuje k šířce brouka.)
4. Jaká byla úhlová velikost brouka při pozorování lupou, jestliže se Výfučkovo oko, kterým brouka pozoruje, nacházelo v ohnisku, tedy 10 cm od lupy? Porovnejte tuto úhlovou velikost s úhlovou velikostí při pozorování bez lupy v předchozí podúloze.

První podúlohu řešte výpočtem. Druhou až čtvrtou můžete řešit početně nebo graficky.

Nápověda: Mohou vám pomoci obrázky ve Výfučení.

1. Pro výpočet použijeme zobrazovací rovnici z Výfučení ve tvaru

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'},$$

kde f značí ohniskovou vzdálenost lupy, a vzdálenost brouka od lupy a a' vzdálenost obrazu brouka od lupy. Z této rovnice si vyjádříme veličinu a' .

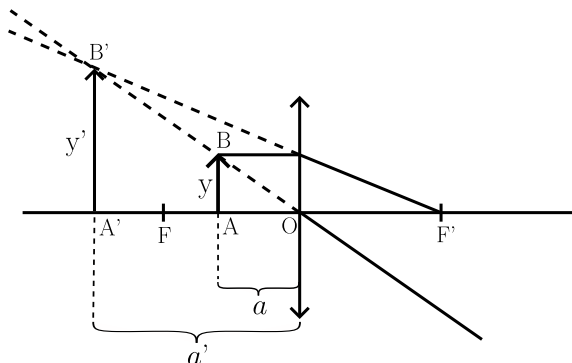
$$a' = \frac{af}{a - f}$$

Teď už nám jen stačí dosadit hodnoty $a = 6 \text{ cm}$ a $f = 10 \text{ cm}$ ze zadání.

$$a' = \frac{6 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}}{6 \text{ cm} - 10 \text{ cm}} = -15 \text{ cm}$$

Obraz je ve vzdálenosti 15 cm před lupou. Díky zápornému znaménku víme, že se jedná o obraz zdánlivý.

2. K určení šířky obrazu budeme potřebovat vypočítat zvětšení lupy Z , odvodíme si proto vzorec na jeho výpočet.



Obrázek 7: Znázornění zobrazení předmětu tenkou spojnou čočkou

Na obrázku 7 je znázorněné zobrazení brouka lupou. Z obrázku je zřejmé, že trojúhelníky OAB a $OA'B'$ jsou podobné, tj. mají stejný tvar a liší se pouze svými velikostmi. Konkrétně velikost trojúhelníku, jehož stranou $A'B'$ je obraz předmětu (brouka), je Z -násobkem velikosti trojúhelníku, jehož stranou AB je předmět (brouk).

Pro podobné trojúhelníky platí, že poměr libovolné odpovídající dvojice stran je v obou trojúhelnících stejný. Pro řešení této podúlohy se budeme zajímat o poměr stran, které tvoří šířka předmětu, resp. jeho obrazu a vzdálenost předmětu, resp. jeho obrazu od čočky. Můžeme tedy psát

$$\frac{|AB|}{|OA|} = \frac{|A'B'|}{|OA'|}.$$

Když si velikost strany AB , resp. $A'B'$ označíme y , resp. y' a strany OA , resp. OA' jako a , resp. a' , získáme následující rovnici, ze které již jednoduše vyjádříme velikost obrazu předmětu (brouka) y' .

$$\frac{y}{a} = \frac{y'}{a'} \Rightarrow y' = y \frac{a'}{a}$$

Abychom dodrželi znaménkovou konvenci používanou ve Výfučení, musíme na pravou stranu rovnice přidat znaménko minus.¹⁷

Výsledné vztahy pro zvětšení Z tenké čočky a velikost obrazu y' tedy budou následovné:

$$Z = -\frac{a'}{a},$$

$$y' = -y \frac{a'}{a}.$$

Nyní jen dosadíme hodnoty ze zadání $a = 6 \text{ cm}$, $y = 14 \text{ mm}$ a hodnotu $a' = -15 \text{ cm}$ vypočítanou v předchozí podúloze.

$$y' = -14 \text{ mm} \cdot \frac{-15 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 35 \text{ mm}$$

Obraz brouka je široký 35 mm.

3. Úhlovou velikost předmětu δ lze přibližně¹⁸ vypočítat jako podíl šířky předmětu d a vzdálenosti L , ze které se na předmět díváme.

$$\delta = \frac{d}{L}$$

Dosazením číselných hodnot obou veličin získáme úhlovou velikost předmětu v radiánech.¹⁹

Stačí nám tedy do vztahu jen dosadit šířku brouka $y = 14 \text{ mm} = 1,4 \text{ cm}$ a délku $L = 25 \text{ cm}$.

$$\delta = \frac{1,4 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} \text{ rad} = 0,056 \text{ rad} \doteq 3,2^\circ$$

4. K výpočtu úhlové velikosti brouka při pozorování lupou použijeme stejný vztah jako v předchozí podúloze. Tentokrát však za šířku předmětu d dosadíme velikost obrazu brouka $y' = 35 \text{ mm} = 3,5 \text{ cm}$ a za vzdálenost L , ze které předmět pozorujeme, dosadíme součet vzdálenosti oka od čočky $f = 10 \text{ cm}$ a velikosti vzdálenosti obrazu od čočky $|a'| = 15 \text{ cm}$.

$$\delta' = \frac{y'}{|a'| + f} = \frac{3,5 \text{ cm}}{15 \text{ cm} + 10 \text{ cm}} \text{ rad} = 0,14 \text{ rad} \doteq 8,0^\circ$$

Úhlová velikost brouka při pozorování lupou byla tedy přibližně 2,5krát větší než při pozorování bez lupy.

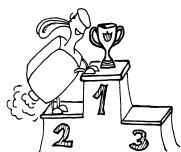
Vojtěch Kubrycht

vojtech.kubrycht@vyfuk.org

¹⁷K odůvodnění tohoto kroku nám stačí rychlá úvaha. Chceme, aby kladné zvětšení znamenalo přímý obraz a záporné zvětšení obraz převrácený. Podívejme se na případ z obrázku 7, kde máme „zápornou“ vzdálenost a' a zároveň nám vznikne přímý obraz. Potřebujeme tedy kladnou hodnotu zvětšení Z . Jelikož je hodnota vzdálenosti a kladná, musíme přidat znaménko minus, abychom se zápornou hodnotou a' získali kladný výsledek. Stejnou úvahu lze provést i pro případ, kdy vznikne skutečný převrácený obraz na pravé straně čočky tj. a' je kladné, ale Z musí být záporné.

¹⁸Pro přesný výpočet by bylo třeba využít inverzní goniometrické (cyklometrické) funkce, ale zmíněná aproximace je dostatečně přesná, pokud platí, že šířka předmětu je mnohem menší než vzdálenost, ze které ho pozorujeme tj. $d \ll L$.

¹⁹Radián je jednotka úhlu, k přepočtu na stupně lze použít vztah $1 \text{ rad} = 180^\circ / \pi$. Více se o radiánech se můžete dočíst např. zde <https://cs.wikipedia.org/wiki/Radi%C3%A1n>.



Pořadí řešitelů po I. sérii

Kompletní výsledky najdete na <https://vyfuk.org>.

Kategorie šestých ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
		5	5	6	7	8	8	7	46	46
1.–2. Kryštof Bílý	ZŠ Bernarda Bolzana, Tábor	4	5	6	7	8	6	6	42	42
1.–2. Jan František Lukáš	G Jírovcova, České Budějovice	5	5	4	7	7	8	6	42	42
3.–4. Berenika Bromová	ZŠ a MŠ da Vinci Dolní Břežany	5	5	6	6	5	8	2	37	37
3.–4. Matěj Novák	ZŠ Hranice, Tř. 1. máje	5	5	6	7	3	6	5	37	37
5. Anna Bouzková	G, Špitálská, Praha	4	5	4	7	8	3	1	32	32
6. Jakub Zelenka	Gymnázium, Říčany	3	5	2	7	5	8	1	31	31
7. Anna Achedžak	ZŠ a MŠ Červený vrch, Praha	4	4	4	6	–	–	5	23	23
8.–9. Marek Bieleš	ZŠ a MŠ Bystřice	4	5	4	–	5	–	–	18	18
8.–9. Tomáš Zapach	G Ústavní, Praha	5	2	4	7	–	–	–	18	18
10. Klára Knopfová	ZŠ J. A. Kom. Hradec Králové	5	5	–	–	–	6	–	16	16
11. Ondřej Piše	Gymnázium Sázavská Praha 2	4	5	6	–	–	–	–	15	15
12.–15. Adela Hálbigová	G T. G. Masaryka, Litvínov	–	2	3	7	2	–	–	14	14
12.–15. Eliáš Raffaele Addamo	Nový PORG, Praha	5	2	4	3	0	0	0	14	14
12.–15. Anna Staňková	ZŠ Děčín I	5	5	4	–	–	–	–	14	14
12.–15. Karolína Tesárková	G, Otrokovice	5	3	–	–	2	4	–	14	14
16. Filip Kosař	G, Blansko	5	5	–	–	–	3	–	13	13
17. Kristína Nejedlá	G, Jateční, Ústí nad Labem	4	5	0	0	0	2	0	11	11
18.–21. Jakub Brabec	ZŠ SVAT Olomouc	5	5	–	–	–	–	–	10	10
18.–21. David Nosek	ZŠ Otická, Opava	5	5	–	–	–	–	–	10	10
18.–21. Antonín Pícek	G J. Wolker, Prostějov	5	5	–	–	–	–	–	10	10
18.–21. Monika Větrovcová	ZŠ, MŠ a ZUŠ Jesenice	5	5	–	–	–	–	–	10	10
22.–23. Tomáš Böhm	ZŠ J. A. Kom. Hradec Králové	4	5	–	–	–	–	–	9	9
22.–23. Michaela Hanousková	ZŠ a MŠ Jičín	4	5	–	–	–	–	–	9	9
24.–25. Michal Majerík	ZŠ Polabiny 3, Npor. Eliáše	5	3	–	–	–	–	–	8	8
24.–25. Kristýna Zvonková	ZŠ Dřevnická, Zlín	5	3	–	–	–	–	–	8	8
26.–28. Štěpán Lýsek	Slovanské G, Olomouc	3	4	–	–	–	–	–	7	7
26.–28. Jaroslav Špiroch	ZŠ a MŠ Litvínov - Hamr	2	3	–	–	–	2	–	7	7

Kategorie sedmých ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
		5	5	6	7	8	8	7	46	46
1. Richard Menšík	G, Boskovice	5	5	6	7	7	6	5	41	41
2. Emilie Kimmerová	ZŠ a MŠ Kotlářská, Brno	5	5	5	7	5	6	3	36	36
3.–4. Tomáš Wolf	G, Nad Alejí, Praha	5	5	5	7	5	6	1	34	34
3.–4. Štěpán Zouhar	G J. Blahoslava, Ivančice	5	5	6	3	5	5	5	34	34
5.–7. Agnes Dostálova	G Mikulášské n. 23, Plzeň	5	5	6	4	5	8	–	33	33
5.–7. Alexandr Lukács	G J. A. Komenského, Uh. Brod	5	5	6	7	2	8	–	33	33
5.–7. Štěpán Remes	G, Hustopeče	5	5	6	7	5	–	5	33	33
8.–9. Petr Kysela	G, Český Krumlov	4	4	6	–	4	8	5	31	31

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
		5	5	6	7	8	8	7	46	46
8.–9. <i>Michaela Plívová</i>	ZŠ a ZUŠ České Budějovice	5	4	6	4	4	3	5	31	31
10. <i>Matěj Fouček</i>	G, Palackého 191, Ml. Boleslav	5	2	4	7	5	7	–	30	30
11. <i>Polina Efimova</i>	Sunny Can. International Sch.	3	2	2	7	8	3	4	29	29
12. <i>Fabián Muster</i>	G Chotěboř	3	4	6	7	0	6	1	27	27
13.–15. <i>Antonín Bublan</i>	G Tišnov	5	5	4	7	–	5	–	26	26
13.–15. <i>Anna Ličková</i>	G, Litoměřická, Praha	5	5	6	–	–	7	3	26	26
13.–15. <i>Anna Závrbská</i>	G prof. J. Patočky, Praha	4	5	3	6	4	4	–	26	26
16. <i>Ella Heinichová</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	5	2	4	7	–	6	–	24	24
17. <i>Zuzana Dorotíková</i>	ZŠ a MŠ Lískovec, K Sedlístím, F	5	3	3	7	5	–	–	23	23
18.–19. <i>Dominik Jochymek</i>	ZŠ , Vendryně	5	2	2	–	5	8	–	22	22
18.–19. <i>Klaudie Krumpová</i>	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	3	4	6	4	5	–	–	22	22
20.–22. <i>Klára Šimková</i>	G Mikuláské n. 23, Plzeň	5	3	4	4	4	–	–	20	20
20.–22. <i>Eliška Voráčová</i>	G, Brno-Bystrc	4	5	6	–	5	–	–	20	20
20.–22. <i>Viktorie Žídková</i>	ZŠ a MŠ Baška	5	4	4	–	–	7	–	20	20
23. <i>Ivana Šarochová</i>	ZŠ Amálská, Kladno	5	5	4	–	2	3	–	19	19
24.–27. <i>Pavčina Břízová</i>	G Týn nad Vltavou	5	5	5	–	–	3	–	18	18
24.–27. <i>Petr Do Vu</i>	ZŠ Václavkova, Mladá Boleslav	3	1	4	4	3	1	2	18	18
24.–27. <i>Nitsah Harel</i>	ZŠ a MŠ Višňové	5	4	4	–	–	5	–	18	18
24.–27. <i>Eliška Kovářová</i>	G, Uherské Hradiště	5	5	4	–	–	4	–	18	18

Kategorie osmých ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
		5	6	7	8	8	7	7	41	41
1.–3. <i>Lukáš Kopecký</i>	G, Litomyšl	–	5	6	7	8	8	7	41	41
1.–3. <i>Anna Přivětivá</i>	G, Litoměřická, Praha	–	5	6	7	8	8	7	41	41
1.–3. <i>Viktorie Snášelová</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	5	6	7	8	8	7	41	41
4. <i>Pavel Doskočil</i>	G, Žamberk	–	5	6	6	8	8	6	39	39
5.–6. <i>Pavla Holečková</i>	Jungmannova ZŠ Beroun 2	–	5	6	7	7	8	5	38	38
5.–6. <i>Vladimír Kotsch</i>	Gymnázium Sázavská Praha 2	–	5	6	7	5	8	7	38	38
7.–8. <i>Lucie Bělová</i>	G Opatov, Praha	–	5	6	5	8	5	7	36	36
7.–8. <i>Oleg Šatánek</i>	Střední škola Hradec Králové	–	5	6	7	5	8	5	36	36
9. <i>Eva Brožovičová</i>	Podkrušnohorské G, Most	–	5	6	7	2	8	7	35	35
10. <i>Blanka Nováková</i>	G, Vídeňská, Brno	–	5	5	6	7	8	3	34	34
11. <i>Vojtěch Večerník</i>	G Dašická, Pardubice	–	5	6	7	5	3	7	33	33
12.–13. <i>Rafael Foltýn</i>	ZŠ Boženy Němcové, Litoměřice	–	4	5	4	8	5	6	32	32
12.–13. <i>Amelie Zemanová</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	6	7	4	8	2	32	32
14.–15. <i>Lukáš Košovan</i>	Gymnázium Oty Pavla, Praha	–	5	4	7	5	2	5	28	28
14.–15. <i>Eva Sýkorová</i>	G a JŠ, Břeclav	–	5	6	7	2	8	–	28	28
16.–18. <i>Jakub Grynhoff</i>	G K. Sladkovského, Praha	–	5	5	7	5	5	–	27	27
16.–18. <i>Matyáš Kubíček</i>	G a ZŠ Labyrinth	–	5	4	4	8	–	6	27	27
16.–18. <i>Šimon Kunca</i>	G, Česká Lípa	–	5	6	7	5	3	1	27	27
19. <i>Matěj Vacek</i>	ZŠ T. G. M. Lomnice nad Popelkou	–	5	5	6	–	3	7	26	26
20.–22. <i>Dorota Guzi</i>	ZŠ a MŠ Pastviny, Brno	–	5	4	7	8	–	–	24	24
20.–22. <i>Martin Urban</i>	ZŠ a MŠ Dlouhá, Pohořelice	–	5	5	7	–	7	–	24	24
20.–22. <i>Lucie Vaňková</i>	ZŠ Dr. Františka Ladislava Riegr	–	5	4	4	2	3	6	24	24
23.–24. <i>Jan Hýžďal</i>	Nový PORG, Praha	–	5	6	6	2	3	0	22	22
23.–24. <i>Adela Polóniová</i>	ZŠ Komenského n., Slavkov u Brna	–	1	5	7	5	1	3	22	22
25.–26. <i>Dominika Martínková</i>	G Františka Křížíka, Plzeň	–	5	5	4	3	1	3	21	21
25.–26. <i>David Vančata</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	5	5	6	5	–	–	21	21
27. <i>Bartoloměj Stoklásek</i>	ZŠ Troubelice	–	2	6	7	5	–	–	20	20

Kategorie devátých ročníků

jméno <i>Student</i>	škola <i>Pilný</i>	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
	MFF UK	5	6	7	8	8	8	7	41	41
1.–2. Adam Houdek	ZŠ a MŠ, Březová, okr. U. H.	–	4	6	7	8	8	6	39	39
1.–2. Vít Kupilák	G, Zábřeh	–	5	4	7	8	8	7	39	39
3.–6. Matěj Dudek	ZŠ Polabiny 3, Npor. Eliáše	–	5	5	7	8	8	5	38	38
3.–6. Laura Jurčickova	FZŠ při PedF UK Barrandov	–	5	6	6	8	8	5	38	38
3.–6. Petr Matějka	G, Brno - Řečkovice	–	5	6	7	5	8	7	38	38
3.–6. Jakub Vávra	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	5	6	7	8	6	6	38	38
7.–12. Rozálie Michaela Furchová	G, Židlochovice	–	3	6	7	8	8	5	37	37
7.–12. Jan Horský	G, Brno - Řečkovice	–	5	6	7	5	8	6	37	37
7.–12. Mariana Hořínková	Wichterlovo G, Ostrava	–	5	6	6	6	8	6	37	37
7.–12. Jan Murswiek	ZŠ náměstí Míru, Nový Bor	–	5	6	7	7	7	5	37	37
7.–12. Emma Polcarová	Sportovní G, Plzeňská, Kladno	–	5	6	7	8	6	5	37	37
7.–12. Valentina Vykoukalová	ZŠ Komenského, Zlín - Malenovice	–	5	6	7	5	7	7	37	37
13.–14. Jaroslav Hatina	15. základní škola Plzeň	–	5	4	7	5	8	6	35	35
13.–14. Daniel Vévoda	G Jaroslava Seiferta, Praha	–	5	4	7	5	7	7	35	35
15.–16. Ota Koštejn	ZŠ náměstí Míru, Nový Bor	–	5	6	7	7	4	5	34	34
15.–16. Viktor Novák	Nový PORG, Praha	–	5	4	5	8	7	5	34	34
17.–20. Aneta Brzokoupilová	Jungmannova ZŠ Beroun 2	–	3	5	7	5	8	5	33	33
17.–20. Barbora Petrášková	28. základní škola Plzeň	–	5	5	7	2	7	7	33	33
17.–20. Šimon Swaczyna	Slovanské G, Olomouc	–	5	6	7	8	–	7	33	33
17.–20. Dan Školař	ZŠ a MŠ, Březová, okr. U. H.	–	5	5	7	8	8	–	33	33
21. Antonín Šreiber	ZŠ Skálova, Turnov	–	5	5	7	5	3	7	32	32
22.–23. Květa Bouchalová	G, Olomouc-Hejčín	–	5	6	7	6	–	7	31	31
22.–23. Tomáš Malíček	G T. G. Masaryka, Litvínov	–	5	4	4	8	5	5	31	31
24. Marko Parokhin	Slovanské G, Olomouc	–	5	6	7	8	4	–	30	30
25. Adam Kalina	I. Něm. zem. G, Rybníček, Brno	–	5	6	6	5	7	0	29	29
26.–28. Felix Cumarav	ZŠ Jilovská, Praha	–	–	–	6	8	8	6	28	28
26.–28. Michal Jirout	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	–	5	4	6	8	–	5	28	28



Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <https://vyfuk.org>
e-mail: vyfuk@vyfuk.org



/ksvyfuk



@ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.