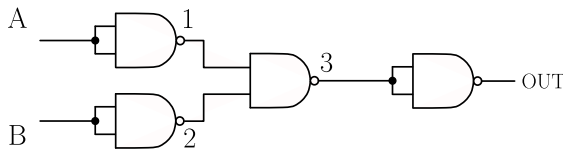


Úloha VI.V ... Jen nuly a jedničky

7 bodů; průměr 5,47; řešilo 85 studentů

1. Převeďte do binární soustavy číslo 1 729, které je takto zapsáno v desítkové soustavě, a číslo 22 433, které je vyjádřeno v pětkové soustavě. Tato čísla následně sečtěte a převeďte zpět do desítkové soustavy. Hodnocen bude uvedený postup, nikoliv jen správný výsledek.
2. Vytvořte pouze pomocí hradel NAND a NOR obvod se dvěma vstupy, který bude mít jako výstup vždy 1. Daný obvod nakreslete.
3. Napište logickou tabulku obvodu na obrázku. Kromě výsledného stavu uveďte také stavy v místech označených čísly 1, 2 a 3. Jakému hradlu z tabulky z Výfučení tento obvod odpovídá?



1. Celé číslo můžeme v číselné soustavě o základě z obecně vyjádřit jako součet násobků mocnin se základem z , přičemž číslo, kterým danou mocninu základu násobíme, může být nanejvýš $z - 1$.

$$k_n \cdot z^n + k_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + k_2 \cdot z^2 + k_1 \cdot z^1 + k_0 \cdot z^0$$

$$k_i \leq z - 1$$

V zájmu zkrácení zápisu obvykle vynecháváme mocniny základu (z kontextu ale musí být vždy zřejmé, v jaké soustavě je dané číslo zapsané). Bude tedy platit, že cifra na m -tém místě bude odpovídat násobku k_{n+1-m} . Stačí tedy číslo v desítkové soustavě rozložit na navzájem různé mocniny dvojky a máme hotovo.

Chceme-li, aby byly mocniny dvojky, které dají dohromady dané číslo v desítkové soustavě, navzájem různé, musíme od daného čísla vždy odečíst nejvyšší možnou mocninu dvojky (tak, aby byl výsledek nezáporný). To už by nám mělo dostatečně napovědět, jak tento příklad efektivně vyřešit. Číslo z desítkové soustavy do jiné převedeme prostým standardním dělením se zbytkem. Postupujeme krok za krokem. V každém kroku vydělíme výsledek předchozího dělení základem z požadované soustavy a poznamenejme si zbytek. Zastavíme se v okamžiku, kdy nám celočíselný podíl vyjde jako 0. Zbytky v přesně opačném pořadí, než jsme je dostali, dávají dohromady kýžené číslo zapsané v soustavě o základě z . Proč to tak funguje, může naznačit upravený zápis pro $n = 3$.

$$z(z(z(k_3) + k_2) + k_1) + k_0$$

Tímto dostáváme, že $1\,729_{(10)} = 110\,1100\,0001_{(2)}$. Stejným způsobem můžeme pokračovat i u čísla zapsaného v pětkové soustavě (to si ovšem nejprve převedeme do desítkové soustavy).

$$22\,433_{(5)} = 2 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 1\,618_{(10)} = 110\,0101\,0010_{(2)}.$$

Při sčítání ve dvojkové soustavě postupujeme stejně jako u písemného sčítání v desítkové soustavě. Vždy, když součet cifer stejného řádu přesáhne základ soustavy, přeneseme 1 do vyššího řádu.

$$110\ 1100\ 0001_{(2)} + 110\ 0101\ 0010_{(2)} = 1101\ 0001\ 0011_{(2)}$$

$$\begin{array}{r} 110\ 1100\ 0001_{(2)} \\ + 110\ 0101\ 0010_{(2)} \\ \hline 1101\ 0001\ 0011_{(2)} \end{array}$$

Ověříme ještě, že výsledek $1101\ 0001\ 0011_{(2)}$ je roven součtu zadaných čísel v desítkové soustavě.

$$1\ 729_{(10)} + 1\ 618_{(10)} = 3\ 347_{(10)}$$

$$1101\ 0001\ 0011_{(2)} = 1 \cdot 2^{11} + 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3\ 347_{(10)}$$

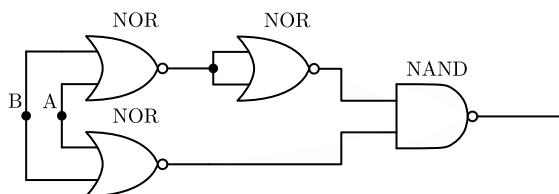
Vidíme, že dosažené výsledky se rovnají.

2. Možných řešení podúlohy je spousta, my si představíme jedno z nich.

Postupujeme od konce. Jako poslední hradlo připojíme například NAND, které vrací na výstupu 1 také v případech, kdy jsou vstupní hodnoty rozdílné.

K získání rozdílných hodnot na vstupu NAND využijeme vlastnosti „N-“ (z anglického záporu „not“) hradel, která jsou přesným logickým opakem základních hradel. Tím, že za sebe připojíme sudý počet takových hradel stejného typu, dostaneme k nim přesně logicky opačné hradlo, zatímco při lichém počtu dostaneme opět původní hradlo.

Zapojením dvou hradel NOR na vstupy A i B dostaneme dvě tzv. *větvě*, na kterých bude vždy stejný stav. Připojíme-li další hradlo NOR na jednu z větví, bude na větvích vždy opačný stav. Větvě tak už stačí jen napojit na NAND a obvod je postavený.



Obrázek 1: Výsledný obvod s výstupem 1 pro libovolný vstup

3. Všechna hradla, ze kterých je obvod tvořen, jsou typu NAND. Stav 1 bude v místě 1, resp. 2, právě když bude 0 na vstupu A, resp. B. V místě 3 pak bude stav 0, právě když bude mít 1 na vstupu z míst 1 i 2. Poslední hradlo NAND bude na vstupu dostávat vždy dvě stejné hodnoty, a proto bude jeho logický výstup přesně opačný než vstup.

Porovnáním vstupních proudů a výstupu s tabulkou z Výfuctení¹ zjistíme, že zapojení odpovídá logickému hradlu NOR.

¹https://vyfuk.org/_media/ulohy/r13/s6/vyfucteni6.pdf

vstup A	vstup B	1	2	3	výstup
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0

Tabulka 1: Tabulka logických hodnot proudu

Michaela Urbanová
michaela.urbanova@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.