

Úloha VI.1 ... Zdrháme ze školy

5 bodů; průměr 4,59; řešilo 46 studentů

Anežka seděla na okně a přemýšlela, jak seskočit dolů, aby pro ni přistání bylo co nejhladší a nejpříjemnější. Zamyslete se i vy a vypočítejte, kolikrát větší rychlostí dopadnete na zem v případě, že z okna ve výšce 1,5 m nad úrovní ulice skáчете ze stoje, oproti případu, kdy si na parapet sednete a skočíte ze sedu. Snažte se o co nejpřesnější výsledek. Potřebné parametry si dohledejte nebo rozumně odhadněte.



Zamysleme se nejprve nad tím, jakou rychlostí dopadne hmotný bod vypuštěný z výšky $H = 1,5$ m. Pak se budeme zabývat případem, kdy máme těleso o nenulových rozměrech.

Pro výpočet použijeme zákon zachování mechanické energie. Potenciální energie člověka na okenním parapetu se při pádu přemění na jeho kinetickou energii. Ta je pak při dopadu přeměněna zejména na teplo, případně na nějakou deformaci jak v podložce, tak v těle dané osoby (ta při pádech z velké výšky dokonce může být i nevratná). Těmito efekty se ovšem nebudeme zabývat.

Potenciální energie hmotného bodu ve výšce h je dána jako $E_p = mgh$, kde m je jeho hmotnost a g je tíhové zrychlení. Tato energie se přemění na kinetickou, kterou popisujeme vztahem $E_k = mv^2/2$, kde v je rychlost při dopadu. Ze zákona zachování energie dostáváme jejich rovnost a následně vyjádříme rychlost.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = mgh = E_p \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Nyní se ovšem musíme zamyslet, co přesně uvažovat jako výšku h v našich případech. Dejme tomu, že v obou situacích popsanych v zadání můžeme uvažovat, že tělo daného člověka je při obou dopadech ve stejné stejné pozici.

Dále v prvním přiblížení můžeme předpokládat, že člověk při dopadu stojí naprosto stejně, jako stál na parapetu před skokem. Jeho těžiště se proto nachází na začátku i na konci stejně vysoko nad jeho plochou dotyku s podložkou. Ta se při skoku snížila právě o výšku parapetu H , takže i těžiště těla kleslo o tuto hodnotu. Právě to bude naše h v rovnici pro rychlost. Pro případ skoku ze stoje tedy dostáváme

$$v_{\text{stoj}} = \sqrt{2gH} \doteq 5,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Už jsme nakousli pojem těžiště. Pro tělesa, která nejsou hmotnými body, totiž můžeme i nadále použít náš vztah odvozený pro rychlost, jenom musíme za h dosadit změnu výšky těžiště, která v druhém případě bude jiná. Když si totiž na parapet sedneme, tak své těžiště snižujeme. Část své potenciální energie zbrzdíme rukama, nohama atd. Naopak když stoupáme, tak konáme práci vůči tíhové síle.

Nyní jde o to, jak přesně budeme situaci modelovat. Můžeme odhadnout, že při stoji se bude těžiště nacházet v polovině výšky člověka, podle Wikipedie je to asi v 55 %. Budeme-li uvažovat osobu vysokou 1,7 m, bude její těžiště po dopadu ve výšce $h_2 = 0,55 \cdot 1,7 \text{ m} \doteq 0,94 \text{ m}$.

Dále uvažujme, že dotyčná osoba má hmotnost $m = 60$ kg. Tělo si rozdělme na několik částí podle toho, v jaké pozici se při sedu nachází. Stehna osoby necht jsou vodorovně na parapetu, jejich délka je 40 cm a celková hmotnost 15 kg. Zbytek nohou necht volně visí dolů, hmotnost lýtek je 10 kg a délka rovněž 40 cm. Zbytek těla pak má výšku 90 cm a hmotnost 35 kg.

Nyní sečteme těžiště jednotlivých částí tak, abychom dostali těžiště celého člověka. Budeme předpokládat, že těžiště všech částí jsou v polovině jejich délek / výšek. Pokud si souřadnici y

zvolíme tak, že její nulová hodnota bude na úrovni parapetu, tak těžiště trupu a hlavy bude ve výšce $y_t = 90 \text{ cm}/2 = 45 \text{ cm}$, těžiště stehů v $y_s = 0 \text{ cm}$ a těžiště lýtek v $y_l = -40 \text{ cm}/2 = -20 \text{ cm}$, kde znaménko mínus značí, že se lýtko nachází pod parapetem. Při určení těžiště stehů jsme předpokládali, že jsou tenká a vodorovně s parapetem.

Celkově je těžiště člověka sedícího na parapetu dáno váženým průměrem jednotlivých částí, který je dělený jeho celkovou hmotností, jako

$$y_c = \frac{1}{m} (m_t y_t + m_s y_s + m_l y_l) = \frac{1}{60 \text{ kg}} (35 \text{ kg} \cdot 45 \text{ cm} + 15 \text{ kg} \cdot 0 \text{ cm} - 10 \text{ kg} \cdot 20 \text{ cm}) \doteq 23 \text{ cm}.$$

Vyšlo nám tedy, že se těžiště takto sedícího člověka vyskytuje pouze 23 cm nad parapetem, celkově je tedy ve výšce $h_1 = 1,5 \text{ m} + 0,23 \text{ m} = 1,73 \text{ m}$ nad zemí.

Nyní už můžeme spočítat, jaký je rozdíl polohy těžiště před seskočením a po něm, a to $\Delta h = h_1 - h_2 = 1,73 \text{ m} - 0,94 \text{ m} = 79 \text{ cm}$, odkud můžeme najít rychlost po dopadnutí jako

$$v_{\text{sed}} = \sqrt{2g\Delta h} \doteq 3,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Pokud si tedy před skokem sedneme na parapet, dopadneme na zem výrazně nižší rychlostí. V našem modelovém příkladu je to rozdíl $3,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ oproti $5,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Skutečné hodnoty se od této samozřejmě liší, ať už kvůli fyziologické konstituci jedince a rozměrech jednotlivých částí jeho těla, nebo kvůli okamžité poloze končetin před skokem a po něm.

Jaroslav Herman
jaroslav.herman@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.