

Úloha V.V ... Rande na měsíci

7 bodů; průměr 4,60; řešilo 62 studentů

1. Hedvi s Patrikem spolu cestovali po měsících Neptunu. S sebou si přivezli airsoftku, pomocí níž chtěli určit poloměr a hmotnost jednoho z měsíců. Když airsoftkou stříleli na Zemi ve vodorovném směru z výšky 1,5 m nad povrchem, náboj urazil 28,3 m než dopadl na zem. Při výstřelu na daném měsíci zjistili, že střela jej oběhne po kruhové orbitě za 3 hodiny, 18 minut a 39 sekund. Následně z těchto údajů určili poloměr a hmotnost tohoto měsíce. Pokuste se o totéž a určete, na kterém měsíci byli.
2. Jakou rychlost musíme dodat satelitu, který obíhá Zemi po geosynchronní orbitě, aby opustil gravitační vliv Země?

1. Pro střelbu na Zemi můžeme využít kinematické rovnice při tíhovém zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Volným pádem spadne kulička z výšky $h = 1,5 \text{ m}$ za čas

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \doteq 0,55 \text{ s}.$$

Jelikož za tuto dobu urazila vzdálenost $l = 28,3 \text{ m}$, musela mít kulička rychlost $v = l/t \doteq 51,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Předpokládejme, že měsíc nemá vlastní atmosféru, nebude tedy docházet ke ztrátám energie vlivem odporu vzduchu, kulička tudíž celou dobu poletí konstantní rychlostí v .¹ Poloměr určíme z doby letu $T = 11\,919 \text{ s}$ po kruhové orbitě jako

$$\begin{aligned} 2\pi R &= vT, \\ R &= \frac{vT}{2\pi}, \\ R &\doteq 97,1 \text{ km}. \end{aligned}$$

Kulička se po kružnici pohybuje 1. kosmickou rychlostí, která je dána vztahem

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}},$$

ze kterého můžeme vyjádřit hmotnost měsíce M :

$$M = \frac{v^2 R}{G} \doteq 3,82 \cdot 10^{18} \text{ kg}.$$

Seznam měsíců Neptunu můžeme najít například na Wikipedii², kde lze zjistit, že nejlépe odpovídá hmotnosti a poloměru měsíc Larissa.

¹V opačném případě by ani orbita kuličky nebyla kruhová. Ztráty jsme zanedbali i v případě letu kuličky v tíhovém poli Země, kde odpor vzduchu bezpochyby je. Kulička ovšem stráví ve vzduchu jen málo času, proto předpokládáme, že ji odpor moc nezpomalí.

²https://en.wikipedia.org/wiki/Moons_of_Neptune

2. Pohybuje-li se sonda po geosynchronní orbitě, neustále se nachází nad stejným místem na Zemi, tedy její perioda oběhu Země je rovna délce jednoho dne $T = 24 \text{ hod} = 86,4 \cdot 10^3 \text{ s}$. Poloměr orbity družice R můžeme určit z rovnosti sil nebo použitím 3. Keplerova zákona:

$$\begin{aligned}\frac{T^2}{R^3} &= \frac{4\pi^2}{GM}, \\ R &= \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}, \\ R &\doteq 42,27 \cdot 10^3 \text{ km},\end{aligned}$$

kde $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ je hmotnost Země. Družice se bude kolem Země pohybovat po kruhové dráze, což odpovídá 1. kosmické rychlosti (v_1). Pro urychlení na 2. kosmickou rychlost (v_2) jí musíme přidat rychlost

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} - \sqrt{\frac{GM}{R}} = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{GM}{R}} \doteq 1,27 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Hedvika Kršková
hedvika.krskova@vyfuk.org

Patrik Kašpárek
patrik.kasperek@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.