

Úloha V.5 ... Stříkací vodoměr

7 bodů; průměr 4,13; řešilo 71 studentů

Filip rád ve sprše přemýšlí. Jednou se zamyslel, kolik vody během jednoho sprchování spotřebuje. Podařilo se mu vymyslet kreativní způsob, jak tento údaj změřit.

1. Nejprve položil sprchovou hlavici na dno sprchy tak, aby mohla voda stříkat kolmo vzhůru. Po puštění voda začala stříkat do výšky $h = 123$ cm. Jakou počáteční rychlostí tryská voda z hlavice?
2. Poté zavěsil hlavici, která má i s vodou uvnitř hmotnost $m = 460$ g, a na ni připojenou hadičku a pustil vodu. Voda začala stříkat směrem kolmým na hadičku a vychýlila ji o úhel $\alpha = 16^\circ$. Jaký objemový průtok musí v tomto případě mít kohoutek? (Hmotnost hadičky zanedbejte.)
3. Pokud má při sprchování Filip puštěnou vodu po dobu $t = 5$ min, jaký objem vody spotřebuje?

1. V prvním případě stříká voda směrem kolmým na zemský povrch a její proud sahá do výšky h . V této výšce mají jednotlivé kapky potenciální energii $m_k gh$, kde m_k značí jejich hmotnost a $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ představuje tíhové zrychlení. Aby se do takové výšky vůbec mohly dostat, musí mít na dně vany (během opuštění hlavice) takovou kinetickou energii $m_k v^2/2$, která bude rovná jejich potenciální energii v nejvyšším bodě. Z této úvahy dostáváme rovnost

$$\frac{1}{2} m_k v^2 = m_k gh,$$

z níž už jsme schopni snadno vyjádřit počáteční rychlost výtrysku vody.

$$v = \sqrt{2gh}$$

Po dosazení zadaných hodnot vychází tato rychlost přibližně $4,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

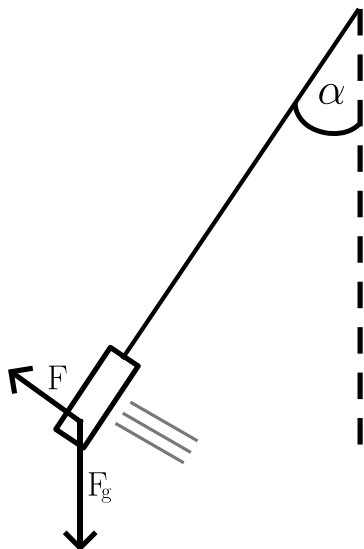
2. Nyní se zaměříme na druhý případ, ve kterém je hlavice zavěšená a voda z ní stříká kolmo na závěs (hadičku). Proud vody generuje sílu, která vychyluje hlavici se závěsem o úhel $\alpha = 16^\circ$. V tomto vychýlení nastává rovnovážná situace, při níž se vyrovná síla trysku a další síla kolmá na závěs, která je projevem tíhové síly.

Označme si druhou zmíněnou sílu jako F_t . Abychom mohli F_t spočítat, musíme nejprve nalézt analogii mezi naším případem a nakloněnou rovinou. Na nakloněné rovině se těleso může pohybovat pouze ve směru kolmém na *normálovou sílu*, tlakovou sílu, kterou působí těleso na rovinu. V našem schématu s hlavicí a hadičkou máme také určitou normálovou sílu, která je rovnoběžná se závěsem. Rovněž je zde jediný směr volného pohybu směr kolmý na normálovou sílu (čili na hadičku). Co do velikosti tak můžeme F_t spočítat jako *tečnou složku* tíhové síly dle matematiky nakloněné roviny.

$$F_t = mg \sin \alpha$$

Dále by nás zajímala velikost síly trysky. V nejobecnějším podání je síla působící na těleso definovaná jako změna jeho hybnosti za určitý čas.

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$



Obrázek 1: Nákres vychýlené sprchové hlavice a na ni působících sil

Sílu F si představme jako sílu, která pohání vodu ven z hlavice. Na základě akce a reakce je tato síla stejně velká jako síla trysku. Čemu ale odpovídá změna hybnosti? Jedná se o záležitost úzce související s objemovým průtokem Q . Za čas Δt bude hmotnost vody, která proteče hlavici, z definice objemového průtoku $\Delta m = \rho Q \Delta t$, kde $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ je hustota vody. Celková změna hybnosti onoho proteklého množství vody odpovídá součinnu Δmv . Získáme tedy

$$\Delta p = \Delta mv = \rho Q v \Delta t,$$

což již můžeme dosadit do definičního vztahu pro sílu

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\rho Q v \Delta t}{\Delta t} = \rho Q v.$$

Jelikož se síla trysku F musí rovnat síle F_t , obdržíme rovnost

$$\rho Q v = mg \sin \alpha,$$

ze které už hravě vyjádříme průtok Q

$$Q = \frac{mg \sin \alpha}{\rho v}.$$

Po dosazení hodnot ze zadání a výše spočtené rychlosti v získáme přibližnou hodnotu průtoku $0,25 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$.

3. V poslední řadě nás už jen informativně zajímá, jaká je Filipova spotřeba vody během sprchování, pokud se sprchuje v průměru 5 minut. Objem vody V , který během jedné sprchy vyčerpá, spočteme jako součin objemového průtoku a doby trvání sprchy.

$$V = Qt \approx 75 \text{ l}$$

Filip tedy během jedné sprchy spotřebuje celkem 75 litrů vody.

Michal Stroff

`michal.stroff@vyfuk.org`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.