

Úloha III.5 ... Svinovací metr

7 bodů; průměr 3,99; řešilo 84 studentů

Patrik vzal do ruky svinovací metr o délce 5 m a celkové hmotnosti $m_c = 250$ g. Následně ho pustil dolů z vysoké zídky, přičemž stupnici držel za kovový konec. Stupnice metru se při pádu postupně odmotávala, dokud se svinovací metr nezastavil a na stupnici se ukázalo číslo $l = 75$ cm.



Představme si, že uvnitř svinovacího metru se nachází pružina smotaná do tvaru šroubovice. Pružina je připevněna ke konci stupnice, takže když se metr odmotává, smotaná pružina se „otáčí“ (fyzicky se natahuje, ale jelikož je smotaná do šroubovice, můžeme říct, že se její konec otáčí). Síla, kterou působí proti odmotání metru, je úměrná úhlu, o který byla otočena z rovnovážné pozice, tj. velikost síly je $k_\alpha \cdot \alpha$, kde α je úhel ve stupních.

Následně Patrik metr rozebral a zjistil, že hmotnost těla metru, tedy bez srolované stupnice, je $m_t = 105$ g a poloměr šroubovice je $r = 2,25$ cm (stupnice je srolovaná do spirály o stejném poloměru jako pružina).

1. Určete délkovou hustotu kovové stupnice metru.
2. Určete úhlovou tuhost pružiny k_α uvnitř metru a sílu, kterou při zastavení pružina působila.
3. Spočítejte práci, kterou vykonaly třecí síly při odmotávání metru.

Uvažujte, že třecí síly jsou úměrné rychlosti, tedy působí pouze při odmotávání metru. Když se metr nepohybuje, jsou třecí síly nulové.

Nápověda: Berte v potaz, že jestliže je síla pružiny přímo úměrná jejímu otočení, pak je i přímo úměrná délce odmotané části metru – chová se tedy podobně jako obyčejné pružiny.

1. Délková hustota λ je definovaná jako podíl hmotnosti daného úseku a jeho délky. Ze zadání víme, že hmotnost kovové stupnice je rozdíl celkové hmotnosti metru a hmotnosti jeho těla $m_s = m_c - m_t = 145$ g a její celková délka je $h = 5$ m. Délková hustota stupnice je

$$\lambda = \frac{m_c - m_t}{h} = \frac{145}{5} \text{ g} \cdot \text{m}^{-1} = 29 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}.$$

2. Svinovací metr se dostane do klidové pozice, když síla vyvolaná pružinou vyrovná tíhovou sílu působící na metr s neodrolovanou částí stupnice uvnitř. Tíhová síla působící na metr tudíž bude

$$F_g = mg = (m_c - l\lambda)g = \frac{250 - 0,75 \cdot 29}{1000} \cdot 9,81 \text{ N} = 2,24 \text{ N}.$$

Proti síle tíhové působí síla pružiny, která má podle zadání tvar

$$F_p = k_\alpha \alpha,$$

kde α je úhel, o který je odrolovaná stupnice z klidové polohy. Z geometrie kružnice umíme vyjádřit úhel jako $\alpha = 360^\circ \cdot l / 2\pi r$. Úhlová tuhost pružiny tudíž bude

$$\begin{aligned} F_g &= F_p, \\ (m_c - l\lambda)g &= \frac{k_\alpha l}{r} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi}, \\ k_\alpha &= \frac{2\pi r}{360^\circ} \cdot \frac{(m_c - l\lambda)g}{l}, \\ k_\alpha &\doteq 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{deg}^{-1}. \end{aligned}$$

Jednotkou $\text{N} \cdot \text{deg}^{-1}$ rozumíme Newton na stupeň.

3. Práci určíme jako rozdíl potenciálních energií v okamžiku, kdy má Patrik metr ještě v ruce a kdy je metr rozvinutý

$$W = \Delta E_p = E_{p0} - E_{p1}.$$

Když má Patrik metr ještě v ruce, tak je veškerá jeho energie uložena v potenciální tíhové energii $E_{p0} = m_c gl$, kde za nulovou hladinu potenciální energie bereme výšku, kde se zastaví rozvinutý metr. Energie rozvinutého metru je uložena ve dvou druzích potenciální energie – v tíhové a v energii pružnosti. K potenciální energii tíhové přispívá pouze část rozvinuté železné stupnice, o hmotnosti λl , jelikož zbytek metru se nachází ve výšce nulové referenční hladiny E_p . Rozvinutá část stupnice má těžiště ve výšce $l/2$, proto je její potenciální energie

$$\lambda l g \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \lambda g l^2.$$

Potenciální energie pružnosti je uložena v napnuté pružině. Pro ni, obdobně jako pro obyčejnou pružinu, platí

$$E_{pp} = \frac{1}{2} k l^2,$$

kde součin kl známe z 2. podúlohy a rovná se tíhové síle nerozvinuté části metru. Po vložení všech poznatků do rozdílů energií určíme vykonanou práci

$$W = m_c gl - \left(\frac{1}{2} \lambda g l^2 + \frac{1}{2} (m_c - l\lambda) gl \right) = \frac{1}{2} m_c gl \doteq 0,92 \text{ J}.$$

Patrik Kašpárek

patrik.kasperek@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.