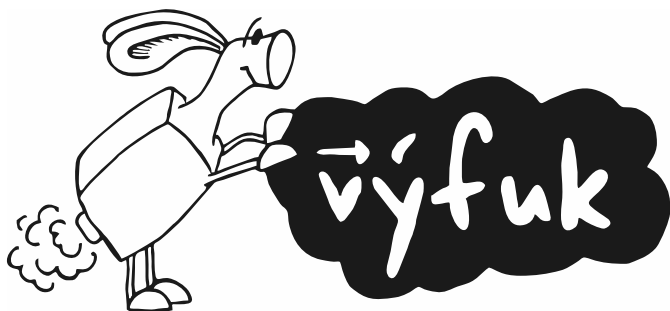




výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

další školní rok už je skoro za námi a společně s ním se chýlí ke konci i letošní ročník Výfuku. Tato brožurka obsahuje zadání poslední, šesté série, které jako vždy najdete i na našem webu. Těšit se můžete například na hraní lodí, shazování jisticů nebo driblování. Ve Výfučení se vydáme na pomezí fyziky a počítačové vědy. Začneme s polovodiči a přes tranzistory se dostaneme až k logickým obvodům a funkcím.

Na začátku dubna proběhlo v Litoměřicích jarní setkání, kterého se zúčastnilo celkem 42 řešitelů. Další akcí, která nás čeká, je letní tábor. Je možné, že se na začátku května uvolní ještě nějaká místa. Pokud jste na seznamu náhradníků, tak ještě nemusíte ztrácet naději, že se na tábor nakonec dostanete. A pokud na tábor jet neplánujete, třeba se potkáme alespoň na podzimním setkání, které se bude konat tradičně v Praze.

Nezapomeňte, že šestá série je poslední možnost, jak si vylepšit pořadí před vyhlášením konečného pořadí, na základě kterého odměníme nejlepší řešitele diplomy a věcnými cenami.

A až budete mít úlohy šesté série vyřešené, sepsané a odevzdané, rozhodně se nemusíte začít bát, že se budete o prázdninách nudit. Stejně jako v několika předchozích letech jsme si pro vás i tentokrát přichystali dvě prázdninové série, nad kterými budete moci v létě u moře nebo na horách přemýšlet.

Organizátoři
vyfuk@vyfuk.org



Zadání VI. série



Termín odeslání: 20. 5. 2024 20.00

Úloha VI.1 ... Zdrháme ze školy ⑥ ⑦

5 bodů

Anežka seděla na okně a přemýšlela, jak seskočit dolů, aby pro ni přistání bylo co nejhladší a nejpříjemnější. Zamyslete se i vy a vypočítejte, kolikrát větší rychlostí dopadnete na zem v případě, že z okna ve výšce 1,5 m nad úrovní ulice skáчете ze stoje, oproti případu, kdy si na parapet sednete a skočíte ze sedu. Snažte se o co nejpřesnější výsledek. Potřebné parametry si dohledejte nebo rozumně odhadněte.



Úloha VI.2 ... Už nehraji ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

5 bodů

Výfuček hrál s Hedvikou loď. Hráli je na poli o velikosti 10×10 políček, z čehož loď zabíraly 30 políček. Bohužel to Výfučkovi moc nešlo a rozhodl se pro zlepšení nálady spočítat, jak se bude měnit pravděpodobnost, že Hedvice nějakou loď treffi. Jaká je pravděpodobnost, že Výfuček v tahu n treffi jakoukoliv loď za předpokladu, že se ve všech předchozích tazích netrefil? Předpokládejte, že pokud Výfuček už na nějaké pole střílel, nebude na něj střílet znovu.

Úloha VI.3 ... Spadly jističe ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Michal má doma jističe napojené na rozvody elektřiny. Jak daleko od jističe může dojít na drátu ke zkratu, aby nedošlo ke shoení jističů? Napětí je $U = 230 \text{ V}$ a jistič zamezí průchodu proudu většího než $I = 2 \text{ A}$ (oboje efektivní hodnoty). Uvažujte, že se jedná o měděný drát s měrným odporem $\rho = 17,8 \text{ m}\Omega \cdot \text{mm}^2 \cdot \text{m}^{-1}$ a má kruhový průřez o průměru $d = 1,8 \text{ mm}$. Na základě výsledku se zamyslete, jestli by tato situace mohla u Michala doma realisticky nastat, tj. jestli by mohl nastat zkrat, aniž by spadly jističe.

Úloha VI.4 ... V letadle ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Výfuček letěl letadlem a nudil se, když tu si všiml, že vidí z okýnka jihovýchodním směrem vodojem pod hloubkovým úhlem 45° . Na chvíli se zamyslel a najednou jej viděl znovu pod stejným hloubkovým úhlem, ale již jihozápadním směrem. Zjistil, že mezitím uběhlo 25 s. Věděl, že letadlo letí v konstantní výšce 5100 m směrem na východ, a tak se rozhodl vypočítat jeho rychlost. Určete tuto hodnotu také.



Úloha VI.5 ... Basketbalová ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ★

8 bodů

Kája si o tělocviku hrála s míčem. Všimla si, že při driblování v různých výškách musí do míče bouchat v jiných časových intervalech.

1. S jakou frekvencí musí driblovat, tj. jak často musí do míče bouchnout, pokud dribluje ve výšce $h = 1 \text{ m}$, což je maximální výška, do které míč vyskočí? Uvažujte, že se míč

odráží od země bez ztráty energie a že v tomto případě Kája při driblování neuděluje míči žádnou rychlost.

- Kája si všimla, že míč po odrazu vyletí pouze do výšky 0,8 m. Jakou mu Kája musí udělit počáteční rychlost, aby vyletěl zpět do výšky h ?
- S jakou frekvencí musí nyní, tj. v situaci v podúloze 2, driblovat?

Úloha VI.E ... Máš málo izolepy ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

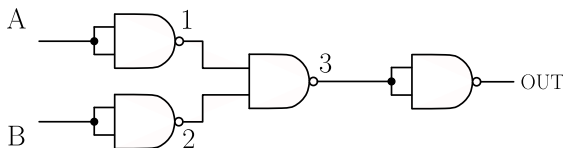
Natka s Ájou si chtěly přilepit svůj společný obrázek na ledničku. Jelikož ale neměly žádné magnetky, rozhodly se použít izolepu. Protože chtěly, aby na ledničce obrázek visel co nejlépe, zajímalo je, kolik izolepy budou potřebovat a jaký typ izolepy nejlépe přilepí jejich obrázek. Rozhodly se proto změřit závislost nosnosti izolepy na její ploše styku s jiným povrchem. Pokuste se také změřit tuto závislost pro alespoň dva různé typy lepicí pásky.



Úloha VI.V ... Jen nuly a jedničky ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

- Převeďte do binární soustavy číslo 1 729, které je takto zapsáno v desítkové soustavě, a číslo 22 433, které je vyjádřeno v pětkové soustavě. Tato čísla následně sečtěte a převeďte zpět do desítkové soustavy. Hodnocen bude uvedený postup, nikoliv jen správný výsledek.
- Vytvořte pouze pomocí hradel NAND a NOR obvod se dvěma vstupy, který bude mít jako výstup vždy 1. Daný obvod nakreslete.
- Napište logickou tabulku obvodu na obrázku. Kromě výsledného stavu uveďte také stavy v místech označených čísly 1, 2 a 3. Jakému hradlu z tabulky z Výfučení tento obvod odpovídá?



Výfučení: Tranzistory – svět nul a jedniček

Nejspíše každý dokáže popsat základní charakteristiku vodiče a izolantu. Vodič je schopen vést elektrický proud, což charakterizuje jeho odpor – čím menší, tím lépe vede. Izolant naopak proud nevede skoro vůbec. Co ale takový polovodič? Z názvu je zřejmé, že bude někde mezi. V tomto Výfučení si jednak vysvětlíme, jak to je s vodivostí těchto látek, ale hlavně uvedeme důležitý příklad jejich využití, kterým jsou tranzistory. Bez těchto součástek si totiž dnešní dobu nikdo nedovede představit, protože tvoří základ prakticky veškeré elektroniky.

Vlastní vodivost

Polovodiče jsou látky, které mají za normálních podmínek větší odpor než kovové vodiče, ale jejich vodivost (převrácená hodnota odporu) se velmi rychle zvyšuje s teplotou – je to tedy přesně naopak než u vodičů, kde s teplotou vodivost klesá.

Abychom tomuto jevu porozuměli, zaměříme se teď podrobně na nejvyužívanějšího zástupce polovodičů – křemík. A když říkáme podrobně, myslíme na atomární úrovni. Pro polovodičový průmysl se využívá velmi čistý monokrystalický křemík, který má krychlovou krystalovou mřížku. Z periodické tabulky vyčteme, že atom křemíku má 14 elektronů, ovšem z hlediska vodivosti nás zajímají pouze 4 valenční elektrony (není náhoda, že je křemík prvek IV. A skupiny). Ty totiž zprostředkovávají vazby s okolními atomy. Když se těmto elektronům dodá určitá energie, například ve formě tepla, mohou vyskočit ze svého místa a vyrazet další a další valenční elektrony. Vznikají tak páry elektronů a děr – tak říkáme místům uvolněným elektrony. Když připojíme polovodič do elektrického pole, můžeme pozorovat uspořádaný pohyb těchto nabitých částic, polovodičem tedy protéká elektrický proud. Tomuto mechanismu vzniku párů elektron–díra říkáme vlastní vodivost.

Příměsová vodivost

V praxi by pro nás bylo jistě poměrně nepraktické zajišťovat vodivost polovodičových součástek pouze zvyšováním teploty. Zahřívání je totiž omezeno již teplotou, při níž daný polovodič taje. Proto zařízení obvykle musíme spíše chladit. Naštěstí existuje ještě další možnost zajištění zvýšení vodivosti polovodičů – pomocí příměsí.

Vraťme se k našemu krystalickému křemíku na atomární úrovni a vyměňme jeden atom křemíku za atom, který má valenčních elektronů 5, tedy například arsen či fosfor. Čtyři jeho valenční elektrony budou tvořit vazby se sousedními křemíky, ovšem ten pátý bude již od začátku volný. Anž bychom museli dodat jakoukoliv energii, máme již od počátku přebytek elektronů oproti dírám. Když takový polovodič umístíme do elektrického pole, volné elektrony se budou pohybovat ke kladnému konci a budou vyrazet další elektrony – polovodičem poteče elektrický proud.

Výše jsme demonstrovali princip na příměsi s přebytkem elektronů, takový polovodič nazýváme N jako negative. Opačným typem je P jako positive, kde jako příměs použijeme prvek se třemi valenčními elektrony, tudíž máme převahu kladných děr.

PN přechod, dioda

Vysvětlili jsme si základy příměsových vodičů. Nyní se zamysleme, co se stane při spojení polovodičů typu P a N. V obou částech budou nosiče náboje konat neuspořádaný pohyb, přičemž na rozhraní obou oblastí bude docházet k jejich rekombinaci, tedy vzájemnému vyrušení páru elektron–díra. Volné elektrony z polovodiče typu N budou na krátké vzdálenosti přeskakovat do kladných děr v polovodiči typu P. Toto tedy vede k tomu, že na okraji P polovodiče vzniká záporně nabitá vrstva a naopak na okraji polovodiče typu N vzniká kladně nabitá vrstva. Tyto nabitě vrstvy vytváří elektrické pole, které zabraňuje dalším elektronům v přechodu z polovodiče N do polovodiče P. Takové oblasti se říká hradlová vrstva. Podle zapojení pak můžeme vnějším elektrickým napětím tuto hradlovou vrstvu zmenšit či zvětšit. Proud pak vedou většinou elektrické náboje na polovodičích a mluvíme o zapojení v propustném, respektive závěrném směru. Součástce, která obsahuje 1 PN přechod, se říká dioda a umožňuje průchod proudem pouze jedním směrem.

Tranzistor

Tranzistor funguje na principu dvou polovodičových PN přechodů. Podle toho, jestli jsou za sebou příměsové polovodiče NPN nebo PNP, se rozlišují dva typy tranzistorů. Uvažujme dále o typu NPN. Vývody z N oblastí nazýváme kolektor (C) a emitor (E). Tranzistor zároveň obsahuje i vývod z prostřední oblasti P, který se označuje jako báze (B). Proud mezi kolektorem C a emitorem E prochází jen ve chvíli, kdy prochází ještě malý proud mezi bází a emitorem. Důvod, proč tomu tak je, lze jednoduše vysvětlit, když přemýšlíme nad tranzistory jako nad dvěma diodami zapojenými v opačném směru. Za normálních podmínek nemůže mezi C a E procházet proud, protože jedna z diod je v závěrném směru. Jakmile však na tuto diodu připojíme napětí v propustném směru, zmenší se hradlová vrstva a může touto diodou procházet proud – stejně jako celým tranzistorem.

Tranzistory jsou velmi důležitá součástka pro veškerou moderní elektroniku. Bez nich by nemohly fungovat žádné mikročipy, které se nacházejí ve výpočetní technice. Jak se ale dostaneme od součástky, která umí spojovat a rozpojovat obvod mezi emitorem a kolektorem na základě napětí na bázi, k výpočetní technice? Odpověď na tuto otázku skýtá speciální odvětví matematiky, Booleova algebra. Booleova algebra je na rozdíl od matematiky, se kterou běžně počítáme, založená na binární soustavě, kde jsou všechna čísla reprezentována pouze kombinacemi dvou stavů – vypnuto a zapnuto, tedy 0 a 1. Čísla v binární soustavě jsou zapisována tak, že na posledním místě čísla je počet jedniček, na předposledním počet dvojek a na cifře n od konce počet 2^{n-1} . Například číslo 154 je tak zapsané v binární soustavě jako 1001 1010, tedy jako $1 \cdot 128 + 0 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1$.

Logická hradla

S pomocí tranzistorů lze postavit takzvaná logická hradla, což jsou elektronické komponenty vykonávající základní logické operace. Například hradlo AND, které má dva vstupy a jeden výstup, má na výstupu kladné napětí pouze v případě, kdy je kladné napětí na obou vstupech. Alternativně v řeči Boolovy algebry má toto hradlo na výstupu jedničku pouze tehdy, pokud je jednička na obou vstupech. Při jiné kombinaci na vstupech je na výstupu nula. Hradlo AND lze postavit z tranzistorů např. podle schématu 1.

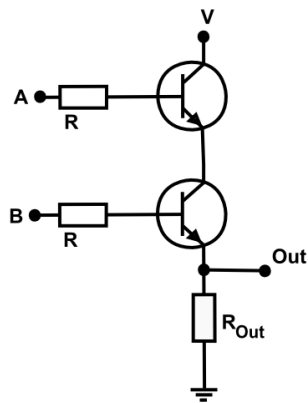
Podobně lze postavit i další logická hradla. Logická hradla se často popisují logickou tabulkou, ve které jsou všechny kombinace vstupů a odpovídajících výstupů. Nejpoužívanější hradla popisuje tabulka na obrázku 2. Za povšimnutí stojí hradla NAND a NOR, lze z nich totiž různým zapojením vytvořit jakékoliv jiné hradlo, jak si vyzkoušíte v úloze.

Jak sčítají počítače?

Z logických hradel můžeme stavět i větší celky, které dokáží dělat aritmetiku ve dvojkové soustavě a provádět logické operace. Asi nejdůležitější aritmetická operace je sčítání. Tu lze provádět podobně jako v desítkové soustavě při písemném sčítání – tedy sčítat vždy stejné cifry, a pokud jejich součet přesahuje základ číselné soustavy, přenést jedničku do vyššího řádu. Takové sčítání můžeme vyjádřit tabulkou výše, kde A a B představují sčítané cifry a C je zde jako přenesená jednička ze sčítání předchozích cifer. Výstupem je odpovídající cifra součtu a to, zda se přenáší jednička.

Tabulka výše je již poměrně složitá a rozhodně není na první pohled zřejmé, jak sestavit obvod z hradel tak, aby odpovídal takovému zadání. Správné zapojení hradel pro sčítání je

Transistor AND Gate



Obrázek 1: Hradlo AND vytvořené ze dvou tranzistorů. Zřejmě bude procházet proud pouze, pokud bude na obou bázích napětí, tedy pokud bude na vstupech A i B stav 1. Autor: EBatlleP, licence: CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>)

vstup A	vstup B	vstup C	součet	přenesení 1
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Tabulka 1: Sčítání binárních čísel v logické tabulce.

na obrázku 3. Sami si postupně pro několik vstupů ověřte, že daný obvod skutečně odpovídá tabulce a představuje tak sčítání dvou čísel.

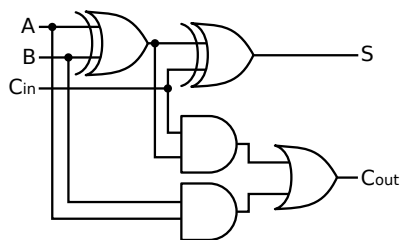
Tyto obvody lze zapojit do řetězce, kde na vstup C se zapojí přenesení 1 (anglicky carry) předchozího obvodu, a sčítat tak několikabitová čísla (čísla s více číslicemi).

Uchování dat

Další nesmírně praktické použití logických hradel je uchovávání dat. Toho lze docílit obvodem, který je zapojen do smyčky. Příkladem je obvod na obrázku 4. Tento obvod má výstup Q a vstupy R a S. Pokud se na vstupu S (set) vyskytne napětí znamenající 1, tak se výstup Q nastaví na 1. To trvá i poté, co již na vstupu S není 1, a to právě do té doby, dokud se neobjeví 1 na vstupu R (reset). Na pochopení toho, jak tento obvod funguje, je nevhodnější

Input		Output (Q)						
								
A	B	AND	OR	INH	XOR	NAND	NOR	XNOR
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1

Obrázek 2: Nejpoužívanější logická hradla spolu s jejich značkami. Všechna tato hradla vzniknou vhodným zapojením mnoha tranzistorů obdobně jako jsme výše ukázali zapojení hradla AND. Autor: Chemsaint, licence: CC BY-SA 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>)



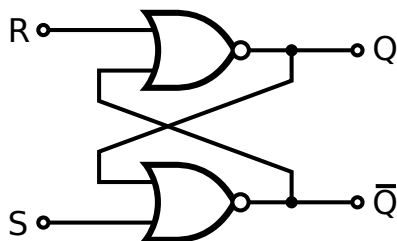
Obrázek 3: Zapojení obvodu pro součet dvou čísel spolu s přenesením jedničky. Vidíme, že se používají hradla AND, OR a XOR. Autor: Cburnett, licence: CC BY-SA 3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)

zvolit si nějaký počáteční vstup a krok po kroku si rozmyslet podle pravdivostní tabulky hradla NOR, co bude následovat.

Závěr

Ukázali jsme si základy toho, jak fungují polovodiče, a představili nejjednodušší polovodičovou součástku – diodu. Spojením takových diod pak vznikne součástka, která je již o mnoho zajímavější a také složitější – tranzistor. Jeho vlastnosti, kdy malé změny napětí na bázi umožňují rozpojit, či spojit kolektor s emitorem, ho předurčují k využití v počítačové technice. Musíme k tomu však přejít do světa pohybů dvou stavů – vypnuto a zapnuto, tedy 0 a 1.

Kombinováním tranzistorů můžeme vytvářet nejrůznější logická hradla a kombinováním hradel pak složitější logické obvody. Dalším krokem je skládat za sebe celé obvody, čímž lze postavit jednoduchý počítač. Ten na základě hodnoty instrukce uložené v paměti dekóduje, co má proběhnout za operaci s daty v paměti, data v paměti upraví a přesune se na další instrukci.



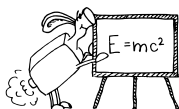
Obrázek 4: Schéma obvodu, který slouží k uložení dat.

Lukáš Linhart

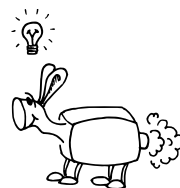
lukas.linhart@vyfuk.org

Mila Tomášů

mila.tomasu@vyfuk.org



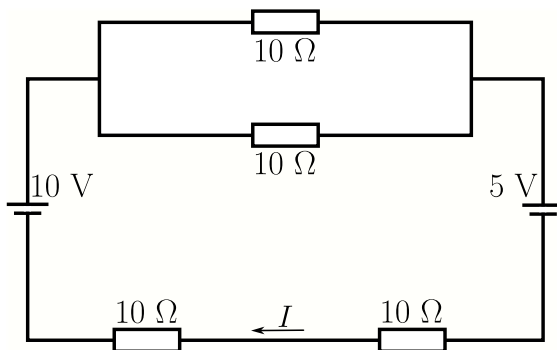
Řešení V. série



Úloha V.1 ... Dva zdroje

5 bodů; průměr 3,51; řešilo 45 studentů

Výfuček si jen tak pro zábavu zapojoval různé obvody a měřil procházející proud. Sestavil obvod se dvěma zdroji, jehož schéma je na obrázku níže, a změřil proud I . Potom si uvědomil, že takový obvod je zbytečně složitý a že může snadno oba zdroje nahradit jediným, aniž by se procházející proud změnil. Nakreslete takový obvod, v němž bude jediný zdroj, a vypočtete procházející proud I .



Obrázek 5: Schéma Výfučkova zapojení

Nejdříve obvod zjednodušíme, aby se nám s ním lépe pracovalo. Jinými slovy „rozdělíme“ zdroji

obvod na dvě části a rezistory v nich nahradíme pouze jedním tak, aby se odpor nezměnil. Využijeme toho, že pro celkový odpor n *paralelně* zapojených rezistorů platí:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n},$$

kde R_n značí odpor n -tého rezistoru. V našem případě paralelním zapojením dvou rezistorů o odporu $R = 10\ \Omega$ dostaneme celkový odpor

$$R_A = \frac{R}{2} = \frac{10}{2}\ \Omega = 5\ \Omega.$$

Celkový odpor *sériově* zapojených rezistorů pak odpovídá součtu jejich odporů.

$$R_s = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

Tímto získáme celkový odpor R_B dvou sériově zapojených rezistorů ve „spodní“ části obvodu.

$$R_B = 2R = 2 \cdot 10\ \Omega = 20\ \Omega$$

Nyní vypočítáme velikost proudu, který prochází obvodem. Náš obvod je po zjednodušení tvořen dvěma zdroji a dvěma rezistory (viz obrázek 6 vlevo). Pro další zjednodušení využijeme toho, že napětí, které vytváří dva sériově zapojené zdroje, můžeme vypočítat jako součet jejich napětí. Zde si ovšem musíme dát pozor. Jelikož zdroje jsou zde zapojeny v opačném směru, bude se ve skutečnosti jejich napětí odečítat. Napětí „náhradního“ zdroje tedy bude $U_C = 5\ \text{V}$ a bude zapojen ve stejném směru, jako byl původně zapojen zdroj s větším napětím (tedy ten s napětím $10\ \text{V}$)¹.

Nyní můžeme obvod ještě naposledy zjednodušit. Máme zde totiž paralelní zapojení rezistorů, které má odpor R_A (mohli bychom ho tedy nahradit rezistorem s odporem R_A), a sériové zapojení rezistorů, které má odpor R_B (tedy ho můžeme nahradit rezistorem s odporem R_B). Tyto dva odpory jsou zde opět zapojeny sériově. Celkový odpor R_C tedy získáme jako jejich součet:

$$R_C = R_A + R_B = 25\ \Omega.$$

Výsledný zjednodušený obvod je znázorněn na obrázku 6 vpravo. Proud I , který protéká odporem R , poté můžeme spočítat pomocí Ohmova zákona:

$$U = RI \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U}{R},$$

kde U je připojené napětí. V našem případě chceme určit proud protékající celým obvodem. Spočítali jsme, že celkové připojené napětí je $U_C = 5\ \text{V}$ a celkový odpor obvodu je $R_C = 25\ \Omega$. Protékající proud tedy bude

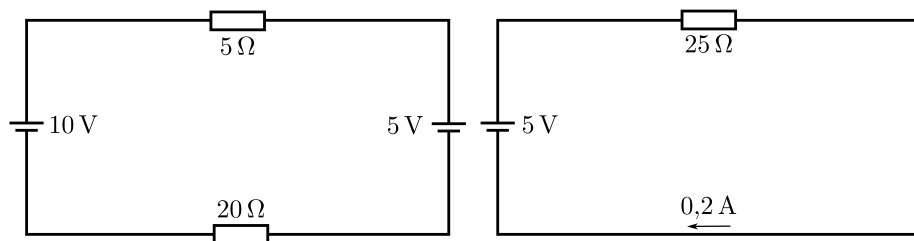
$$I = 0,2\ \text{A}.$$

Výfukův obvod lze nahradit pětivoltovým zdrojem orientovaným ve směru proudu. Obvodem bude procházet proud $0,2\ \text{A}$.

Michaela Urbanová

michaela.urbanova@vyfuk.org

¹To, jak přesně počítat s komplikovanějšími obvody s více zdroji a rezistory, vyjadřují tzv. *Kirchhoffovy zákony*, které jsou ovšem pro účely této úlohy zbytečně složité.



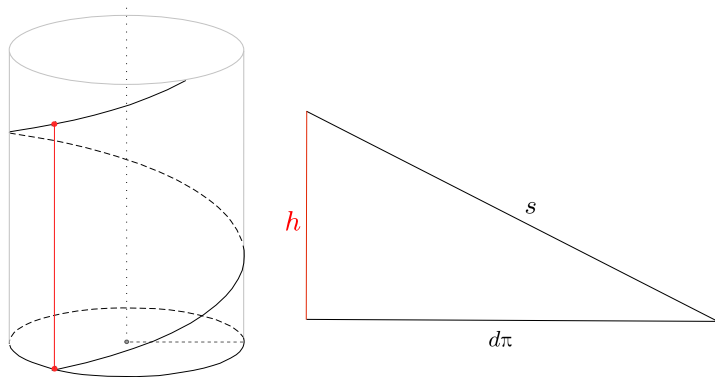
Obrázek 6: Schéma Výfučkova zapojení

Úloha V.2 ... Mravenec na trubce

5 bodů; průměr 4,43; řešilo 143 studentů

Mravenec šplhal po vnější straně trubky. Lezl rovnoměrně po šroubovici a za čas $t = 20$ s, kdy ulezl přesně jednu otočku šroubovice, se dostal do výšky $h = 15$ cm přesně nad místem, ze kterého začal lézt. Spočítejte průměrnou rychlost mravence, jestliže trubka měla průměr $d = 12$ cm. Změní se průměrná rychlost, pokud mravenec na stejné vertikální vzdálenosti za stejný čas stihne vylézt dvě otočky šroubovice?

Abychom mohli spočítat rychlost, potřebujeme znát dráhu, kterou mravenec uleze. Tu si spočítáme pomocí charakteristického trojúhelníku šroubovice, což je vlastně rozvinutá část válcové plochy, na které je zobrazena jedna otočka šroubovice, viz obr. 7.



Obrázek 7: Šroubovice a charakteristický trojúhelník.

Jednou odvěsnou trojúhelníku je délka kružnice (neboli obvod podstavy válcové trubky), kterou spočítáme jako

$$o = d\pi.$$

Druhou odvěsnou je výška h . Přeponu jednoduše spočítáme pomocí Pythagorovy věty.

$$s^2 = o^2 + h^2 \Rightarrow s = \sqrt{(d\pi)^2 + h^2}$$

$$s \doteq 41 \text{ cm}$$

Nyní můžeme spočítat mravencovu průměrnou rychlost

$$v = \frac{s}{t},$$

$$v \doteq 2,0 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pokud mravenec ujde dvě otáčky šroubovice, obejde obvod trubky dvakrát. První odvěšna charakteristického trojúhelníku se tak protáhne na dvojnásobek původní délky, dostaneme tedy

$$o_2 = 2d\pi.$$

Následně vypočítáme dráhu uraženou mravencem s_2 a rychlost mravence v_2 .

$$s_2 = \sqrt{(2d\pi)^2 + h^2}$$

$$s_2 \doteq 76,9 \text{ cm}$$

$$v_2 = \frac{s_2}{t}$$

$$v_2 \doteq 3,8 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

Vidíme, že průměrná rychlost se téměř zdvojnásobila.

Natálie Lászlóová
natalie.laszloova@vyfuk.org

Alena Mouchová
alena.mouchova@vyfuk.org

Úloha V.3 ... Destruktivní medicínbal 6 bodů; průměr 4,37; řešilo 104 studentů

Martinovi se jednoho dne podařilo vyhodit medicínbal o hmotnosti 5 kg až ke stropu tělocvičny. Záhy si však uvědomil následky svého činu a pokusil se ho tedy zpomalit, aby zamezil hlučnému dopadu na podlahu. Předpokládejte, že Martin zachytí medicínbal ve výšce 2,3 m nad podlahou a následně jej konstantní silou zpomaluje, dokud se zcela nezastaví těsně nad zemí. Jakou silou musí Martin při zpomalování působit na medicínbal? Výška tělocvičny je 10 m. Rozměry medicínbalu zanedbejte.

Martin musí „zabrzdit“ kinetickou energii míče a zároveň vyrovnat jeho tíhovou sílu, aby ho zastavil ještě nad zemí. Medicínbal samotný padá z výšky $H = 10 \text{ m}$, kde má nulovou kinetickou energii. Během pádu se pak jeho potenciální energie postupně přeměňuje na kinetickou energii. V každé chvíli bude tedy jeho kinetická energie odpovídat rozdílu potenciálních energií ve výšce H a ve výšce, kde se právě nachází. Pro potenciální energii platí:

$$E_p = mgh.$$

Ve výšce, kde Martin míč zachytí, bude mít míč kinetickou energii

$$E_k = mgH - mgh = mg(H - h).$$

Martin na dráze $h = 2,3 \text{ m}$ míč zabrzdí působením konstantní silou F_k . Musí tedy vykonat práci rovnou energii medicínbalu E_k , z čehož plyne vztah

$$F_k = \frac{E_k}{h} = mg \frac{H - h}{h}.$$

K síle F_k , kterou musí Martin vynaložit na „zabrzdnění“ míče, musíme ještě přičíst tíhovou sílu $F_G = mg$ působící na míč, kterou Martin musí po celou dobu překonávat.

$$F = F_G + F_k = mg + mg \frac{H-h}{h} = mg \frac{H}{h}$$

K tomuto výsledku také můžeme dospět přímo, pokud si uvědomíme, že aby Martin zastavil míč těsně nad zemí, musí mít v tu chvíli míč nulovou kinetickou energii. Pokud uvažujeme, že potenciální energie míče v úrovni podlahy je nulová, tak to znamená, že jeho celková energie bude nulová. Aby ho tedy zastavil, musí Martin vykonat práci rovnou jeho počáteční potenciální energii, která je $E_0 = mgH$, z čehož již snadno dostáváme výsledek. Zbývá už jen dosadit

$$F = 5 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \frac{10 \text{ m}}{2,3 \text{ m}} \doteq 213 \text{ N}.$$

Martin tedy musí působit proti pohybu míče konstantní silou o velikosti 213 N.

Jakub Savula

jakub.savula@vyfuk.org

Úloha V.4 ... Nekonstantní

6 bodů; průměr 4,77; řešilo 97 studentů

Pro vyšší změny teplot přestává být měrná tepelná kapacita některých materiálů nezávislá na teplotě a začne se řídit přibližně lineární závislostí. Uvažujme kov s hodnotou měrné tepelné kapacity $520 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ za teploty 0°C a $570 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ za teploty 100°C . Předpokládejte, že mezi oběma teplotami se měrná tepelná kapacita zvyšuje lineárně. Kolik tepla musíme dodat kusu tohoto kovu o hmotnosti 50 g , chceme-li ho ohřát z teploty 0°C na teplotu 50°C ?

Měrná tepelná kapacita

Nejprve by bylo dobré vyjádřit si závislost měrné tepelné kapacity c na teplotě T za použití údajů ze zadání. Víme, že měrná tepelná kapacita je na teplotě lineárně závislá, tzn. bude se řídit vztahem

$$c = a + bT,$$

kde a a b jsou neznámé konstanty, které si vyjádříme pomocí údajů ze zadání. Víme, že při teplotě $T = 0^\circ\text{C}$ bude měrná tepelná kapacita² daného kovu $c_0 = 520 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$. Pomocí těchto údajů jsme schopni určit koeficient a tak, že údaje dosadíme do výše uvedeného vztahu a vyjádříme z něj a jako neznámou³:

$$a + b \cdot 0 = 520 \quad \Rightarrow \quad a = 520.$$

Koeficient b určíme stejnou metodou podle druhé zadané dvojice hodnot teploty a měrné tepelné kapacity $T = 100^\circ\text{C}$, $c_{100} = 570 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$.

$$520 + b \cdot 100 = 570 \quad \Rightarrow \quad b = 0,5$$

Pro závislost měrné tepelné kapacity na teplotě tedy dostáváme následující předpis:

$$c = 520 + 0,5T.$$

²Měrná tepelná kapacita se většinou udává s jednotkou $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, ale lze používat i jednotku $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$. V definičním vztahu měrné tepelné kapacity vystupuje rozdíl teploty a jelikož je Kelvinova teplotní stupnice „pouze“ posunutá oproti Celsiově teplotní stupnici, toto posunutí se při výpočtu rozdílů teplot odečte, takže ve výsledku jsou obě jednotky ekvivalentní.

³Vždy zde počítáme v základních jednotkách, a tak je v této části pro přehlednost nepíšeme.

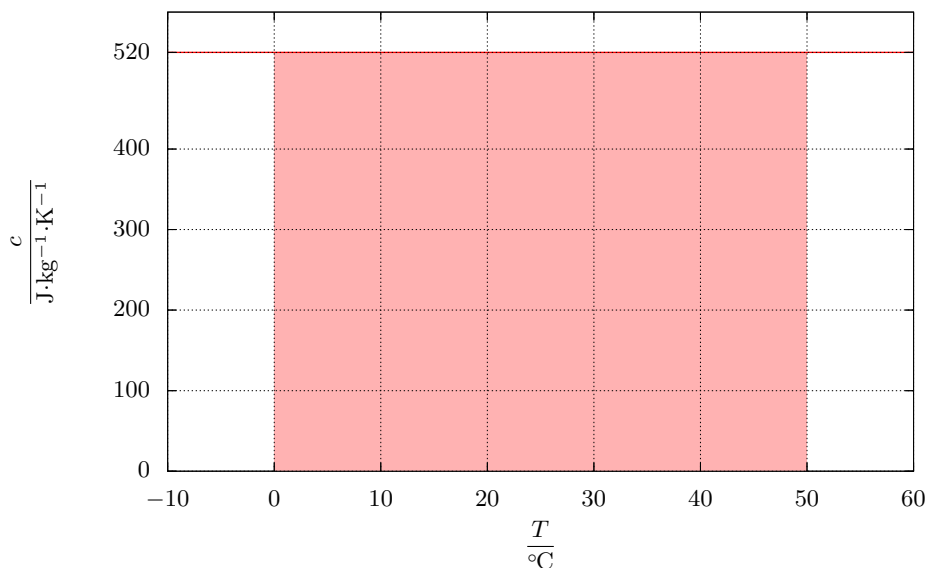
Tepl

Množství tepla, které musíme kusu daného kovu o hmotnosti $m = 50\text{ g}$ dodat, vypočítáme pomocí následujícího vztahu

$$Q = mc\Delta T,$$

kde $\Delta T = 50^\circ\text{C}$ je změna teploty kusu kovu. Problematické ovšem je, že zde měrná tepelná kapacita c závisí na teplotě, a tak nelze správný výsledek získat pouhým násobením.

Zkusme si znázornit problém graficky. Kdyby byla měrná tepelná kapacita našeho kusu kovu konstantní (neměnila by se s teplotou), měla by stále hodnotu $c_0 = 520\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$ a jejím grafem by byla přímka rovnoběžná s osou teploty jako na obrázku 8.



Obrázek 8: Graf konstantní měrné tepelné kapacity

Obsah plochy pod touto přímkou mezi hodnotami teploty $T_1 = 0^\circ\text{C}$ a $T_2 = 50^\circ\text{C}$ by odpovídal obsahu obdélníku o rozměrech c_0 a ΔT .

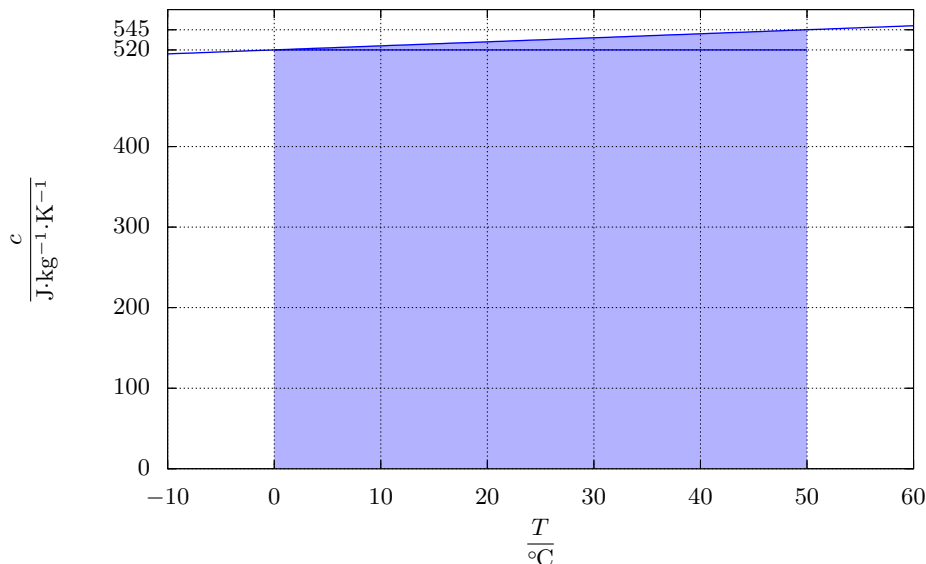
$$S_0 = c_0 (T_2 - T_1) = 26\,000\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$$

Tepl, které bychom kusu kovu museli dodat, by odpovíдалo vynásobení obsahu S_0 a jeho hmotnosti $m = 50\text{ g} = 0,05\text{ kg}$.

$$Q_0 = mS_0 = 1\,300\text{ J}$$

Vraťme se k situaci, kde se měrná tepelná kapacita mění s teplotou. Stále platí, že tělesu musíme dodat tepl, jehož velikost je úměrná ploše pod grafem závislosti měrné tepelné kapacity c na teplotě T . (Odůvodnění tohoto faktu je naznačeno v poznámce na konci tohoto vzorového řešení.) Grafem by stále byla přímka, která ale tentokrát nebude rovnoběžná s osou teploty. Když porovnáme grafy 8 a 9 zjistíme, že obsah pod přímkou je skoro stejný až na trojúhelník, který

„přebývá“ na grafu 9. To znamená, že nám stačí vypočítat obsah tohoto trojúhelníku, přičíst ho k obsahu S_0 obdélníku pod ním a výsledný obsah vynásobit hmotností kusu kovu $m = 0,05 \text{ kg}$. Získáme tak teplo Q , které musíme kusu kovu dodat, abychom ho ohřáli z teploty $T_1 = 0^\circ\text{C}$ na teplotu $T_2 = 50^\circ\text{C}$. Obsah trojúhelníku vypočítáme pomocí vzorce



Obrázek 9: Graf měrné tepelné kapacity lineárně závislé na teplotě

$$S_t = \frac{\Delta c \Delta T}{2} = \frac{(c_{50} - c_0)(T_2 - T_1)}{2},$$

kde c_{50} značí měrnou tepelnou kapacitu kovu za teploty 50°C . Tu spočteme dosazením této teploty výše do předpisu měrné tepelné kapacity.

$$S_t = 625 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Celkový obsah pod přímkou tedy bude

$$S = S_0 + S_t = 26\,625 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Teď už jen tento obsah vynásobíme hmotností kusu kovu a získáme hledané množství tepla.

$$Q = mS = 1\,331,25 \text{ J}$$

Poznámka o výpočtu pomocí plochy pod grafem funkce

Použitý výpočet plyne z myšlenky, že si celé ohřívání rozdělíme na velký počet ohřívání po malých kouscích (tj. třeba 50 ohřátí o 1°C) a u všech vypočítáme, kolik přibližně tepla na ohřátí

potřebujeme. Pro první bychom tedy měli $Q_1 = mc_0 \cdot 1^\circ\text{C}$, pro druhé $Q_2 = mc_1 \cdot 1^\circ\text{C}$ atd. Výsledek po sečtení odpovídá tomu, kdybychom plochu pod grafem vyplnili tenkými obdélníčky, které se vždy levým horním rohem dotýkají grafu. (Plochu zde ovšem poté opět musíme vynásobit hmotností m .)

Musíme si ovšem uvědomit, že takovýto výpočet není úplně přesný, jelikož jsme zanedbali to, že i při ohřátí třeba jen o jeden stupeň se trochu změní měrná tepelná kapacita. Tuto chybu však můžeme zmenšit tím, že si výpočet rozdělíme na ještě více ohřívání po ještě menších kouscích. Obdélníčky tedy budou ještě tenčí a bude jich více, což vede k tomu, že plocha obdélníčků bude nyní lépe odpovídat ploše pod grafem funkce.

Nyní už stačí, když si uvědomíme, že přesný výsledek pro teplo bychom teoreticky získali, pokud bychom si výpočet rozdělili na „nekonečně“ mnoho „nekonečně“ malých ohřátí. To je samozřejmě z praktického hlediska nemožné, jelikož bychom poté úlohy počítali nekonečně dlouho. Součet ploch „nekonečně“ mnoha „nekonečně“ malých obdélníčků je ale již „přesně“ rovna ploše pod grafem funkce. Tímto jsme tedy došli k závěru, který jsme použili k výpočtu. Je důležité zmínit, že tato metoda výpočtu pomocí plochy pod grafem funkce je v pokročilejší fyzice velmi užitečná. Analogická úloha k výše vyřešené je totiž třeba úloha výpočtu dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu. Pokud zvládneme určit plochy pod grafy složitějších funkcí, můžeme snadno počítat i dráhy složitějších pohybů.

Vojtěch Kubrycht

vojtech.kubrycht@vyfuk.org

Úloha V.5 ... Stříkající vodoměr

7 bodů; průměr 4,13; řešilo 71 studentů

Filip rád ve sprše přemýšlí. Jednou se zamyslel, kolik vody během jednoho sprchování spotřebuje. Podařilo se mu vymyslet kreativní způsob, jak tento údaj změřit.

1. Nejprve položil sprchovou hlavici na dno sprchy tak, aby mohla voda stříkat kolmo vzhůru. Po puštění voda začala stříkat do výšky $h = 123$ cm. Jakou počáteční rychlostí tryská voda z hlavice?
2. Poté zavěsil hlavici, která má i s vodou uvnitř hmotnost $m = 460$ g, a na ni připojenou hadičku a pustil vodu. Voda začala stříkat směrem kolmým na hadičku a vychýlila ji o úhel $\alpha = 16^\circ$. Jaký objemový průtok musí v tomto případě mít kohoutek? (Hmotnost hadičky zanedbejte.)
3. Pokud má při sprchování Filip puštěnou vodu po dobu $t = 5$ min, jaký objem vody spotřebuje?

1. V prvním případě stříká voda směrem kolmým na zemský povrch a její proud sahá do výšky h . V této výšce mají jednotlivé kapky potenciální energii $m_k gh$, kde m_k značí její hmotnost a $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ představuje tíhové zrychlení. Aby se do takové výšky vůbec mohly dostat, musí mít na dně vany (během opuštění hlavice) takovou kinetickou energii $m_k v^2/2$, která bude rovná jejich potenciální energii v nejvyšším bodě. Z této úvahy dostáváme rovnost

$$\frac{1}{2}m_k v^2 = m_k gh,$$

z níž už jsme schopni snadno vyjádřit počáteční rychlost výtrysku vody.

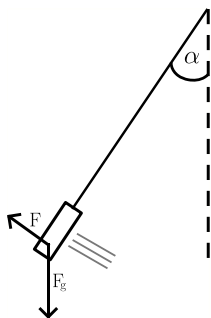
$$v = \sqrt{2gh}$$

Po dosazení zadaných hodnot vychází tato rychlost přibližně $4,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Nyní se zaměříme na druhý případ, ve kterém je hlavice zavěšená a voda z ní stříká kolmo na závěs (hadičku). Proud vody generuje sílu, která vychyluje hlavici se závěsem o úhel $\alpha = 16^\circ$. V tomto vychýlení nastává rovnovážná situace, při níž se vyrovná síla trysky a další síla kolmá na závěs, která je projevem tíhové síly.

Označme si druhou zmíněnou sílu jako F_t . Abychom mohli F_t spočítat, musíme nejprve nalézt analogii mezi naším případem a nakloněnou rovinou. Na nakloněné rovině se těleso může pohybovat pouze ve směru kolmém na *normálovou sílu*, tlakovou sílu, kterou působí těleso na rovinu. V našem schématu s hlavicí a hadičkou máme také určitou normálovou sílu, která je rovnoběžná se závěsem. Rovněž je zde jediný směr volného pohybu směr kolmý na normálovou sílu (čili na hadičku). Co do velikosti tak můžeme F_t spočítat jako *tečnou složku* tíhové síly dle matematiky nakloněné roviny.

$$F_t = mg \sin \alpha$$



Obrázek 10: Nákres vychýlené sprchové hlavice a na ni působících sil

Dále by nás zajímala velikost síly trysky. V nejobecnějším podání je síla působící na těleso definovaná jako změna jeho hybnosti za určitý čas.

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Sílu F si představme jako sílu, která pohání vodu ven z hlavice. Na základě akce a reakce je tato síla stejně velká jako síla trysky. Čemu ale odpovídá změna hybnosti? Jedná se o závislost úzce související s objemovým průtokem Q . Za čas Δt bude hmotnost vody, která proteče hlavicí, z definice objemového průtoku $\Delta m = \rho Q \Delta t$, kde $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ je hustota vody. Celková změna hybnosti onoho proteklého množství vody odpovídá součinu $\Delta m v$. Získáme tedy

$$\Delta p = \Delta m v = \rho Q v \Delta t,$$

což již můžeme dosadit do definičního vztahu pro sílu

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\rho Q v \Delta t}{\Delta t} = \rho Q v.$$

Jelikož se síla trysky F musí rovnat síle F_t , obdržíme rovnost

$$\rho Q v = mg \sin \alpha,$$

ze které už hravě vyjádříme průtok Q

$$Q = \frac{mg \sin \alpha}{\rho v}.$$

Po dosazení hodnot ze zadání a výše spočtené rychlosti v získáme přibližnou hodnotu průtoku $0,251 \text{ s}^{-1}$.

3. V poslední řadě nás už jen informativně zajímá, jaká je Filipova spotřeba vody během sprchování, pokud se sprchuje v průměru 5 minut. Objem vody V , který během jedné sprchy vyčerpá, spočteme jako součin objemového průtoku a doby trvání sprchy.

$$V = Qt \approx 75 \text{ l}$$

Filip tedy během jedné sprchy spotřebuje celkem 75 litrů vody.

Michal Stroff

michal.stroff@vyfuk.org

Úloha V.E ... Tuhost propisky

7 bodů; průměr 4,94; řešilo 84 studentů

Výfuček si hrál s propiskou a objevil v ní malou pružinku. Zamyslel se, jaké jsou asi její vlastnosti. Pomozte mu a libovolným způsobem změřte tuhost pružinky v obyčejné propisce.

Úvod

Před samotným měřením bychom si měli ujasnit, co je to vlastně tuhost. Jedná se o fyzikální veličinu, která charakterizuje každé pružné těleso. Popisuje, jak moc se natáhne vzhledem k velikosti působící síly. V praxi je tuhost důvodem, proč se například každá pružina natáhne jinak, i když je na nich zavěšené stejné závaží. Samotná tuhost nezávisí pouze na materiálu, z něhož je pružina tvořená, ale i na samotné konstrukci pružiny – např. počtu a hustotě závitů. Jednotkou tuhosti je $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ a většinou ji značíme k . Měření můžeme provádět několika způsoby – zde se zaměříme na metodu statickou a dynamickou.

Statická metoda

Měření touto metodou je poměrně snadné. Naším cílem je zjistit, o kolik se pružina prodlouží, když na ni budeme působit určitou silou. Vezmeme si tedy obyčejnou pružinku a pomocí posuvného měřítka změříme její počáteční délku l_0 , následně na ni zavěsíme námi zvolené závaží o hmotnosti m a změříme výslednou délku l . Odečtením těchto dvou délek získáme samotné prodloužení pružiny $\Delta l = l - l_0$. Na závaží působí síla pružnosti F_p a opačným směrem působí

tíhová síla $F_G = mg$, kde $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je tíhové zrychlení. Tyto hodnoty následně dosadíme do vzorce pro výpočet tuhosti k .

$$k = \frac{F_p}{\Delta l} = \frac{mg}{\Delta l}$$

Dodejme ještě, že když zavěsíme pružinku bez závaží, tak se nepatrně prodlouží v důsledku vlastní tíhy. Toto prodloužení je pro pružinku v propisce velmi malé, proto tento efekt zanedbáváme.

Měření

Měření jsme provedli pětkrát – pokaždé se stejnou pružinou, ale jiným závažím. Změřené délky pružinek jsme vždy zaokrouhlili na desetiny milimetru. Posuvné měřidlo sice umožňuje měřit o něco přesněji, ovšem vzhledem ke tvaru pružinky a k tomu, že při samotném měření vždy pružinku trochu deformujeme, je přesnost změření délky jistě menší než přesnost měřidla (dalo by se diskutovat i o tom, jestli námi odhadnutá chyba 0,1 mm stále není moc malá).

n	$\frac{m}{\text{kg}}$	$\frac{l_0}{\text{mm}}$	$\frac{l}{\text{mm}}$	$\frac{\Delta l}{\text{mm}}$	$\frac{F}{\text{N}}$	$\frac{k}{\text{N} \cdot \text{m}^{-1}}$
1	0,10	28,9	31,4	2,5	0,98	390
2	0,25	29,1	34,7	5,6	2,45	440
3	0,40	28,2	37,9	9,7	3,92	400
4	0,50	28,8	40,8	12,0	4,91	410
5	0,75	28,7	45,9	17,2	7,36	430

Tabulka 2: Data naměřená statickou metodou

Z měření je patrné, že tuhost vychází ve všech případech podobně. Po vypočítání průměru jsme zjistili, že tuhost pružiny kancelářské propisky je $k_{\text{stat}} = 410 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. U posledního měření (s největším závažím) se pružina plasticky zdeformovala (již se nevrátila do původní polohy). Dodejme, že vypočítanou tuhost zaokrouhlujeme na 2 platné číslice, protože hmotnost závaží i změnu délky pružinky známe s přesností přibližně na 2 platné číslice.

Dynamická metoda

Na rozdíl od statické metody, kdy pružina se závažím byla v klidu, se v dynamické metodě zaměříme na kmitavý pohyb. Ze začátku se pružina nachází v rovnovážné poloze – tedy stejně jako při statické metodě je na pružině zavěšeno závaží a celá soustava je v klidu a opět platí, že síla pružnosti F_p se rovná tíhové síle F_G . Následně uvedeme závaží do kmitavého pohybu – vychýlíme ho z rovnovážné polohy.

Nyní nastává zajímavý jev – pohyb již není závislý na tíhovém zrychlení. Kmitavý pohyb pružinky bychom tedy pozorovali i například na Mezinárodní vesmírné stanici, kde je stav beztíže. Plyne to mimo jiné z rovnic pro síly. Intuitivně si to lze představit tak, že když se pružinka prodlouží do rovnovážné polohy, vyrovná tím gravitaci a jelikož je síla pružinky lineární vzhledem k původní výchylce, tak je lineární i vzhledem k nové.

Pomocí pokročilé matematiky se dá následně ukázat, že perioda T kmitů pružinky je rovna (nebo lze prostě opsat vzoreček z Wikipedie⁴)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

odkud vyjádříme tuhost jako

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}.$$

Měření

Měření jsme prováděli pomocí detektoru Vernier Go! Motion, který funguje jako sonar. Přístroj nejdříve vyšle zvukovou vlnu, která se v určité vzdálenosti nad přístrojem odrazí a vrátí se zpět do detektoru. Z rychlosti zvuku následně Vernier určí uraženou vzdálenost.

Na pružinu jsme upevnili závaží o hmotnosti 0,5 kg a pružinu rozkmitali. Ve sběrači dat jsme následně viděli pozici závaží v čase. Odečetli jsme čas 20 kmitů pružiny, který byl $T_{20} = 4,55$ s. Doba jedné periody tedy byla $T = T_{20}/20 = 0,228$ s, což vede na tuhost pružiny

$$k_{\text{dyn}} = 380 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}.$$

Diskuze a závěr

Pomocí dvou metod jsme určili tuhost pružiny z propisky jako $k_{\text{dyn}} = 380 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ a $k_{\text{stat}} = 410 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Relativní rozdíl mezi hodnotami je přibližně 5 %. U obou metod jsme se mohli dopustit několika nepřesností. U statické metody docházelo alespoň u vyšších hmotností k plastické deformaci, tedy i změně mechanických vlastností pružiny. Také jsme však mohli chybně odečítat z měřidel. U dynamické metody nebyl pohyb pružiny dokonale harmonický; např. závaží se kymácelo ze strany na stranu, což způsobilo i z části neharmonický graf pohybu v čase. Odečítáním časů z počítače jsme se alespoň vyhnuli chybě v podobě lidského reakčního času.

Hedvika Kršková

hedvika.krskova@vyfuk.org

Úloha V.V ... Rande na měsíci

7 bodů; průměr 4,60; řešilo 62 studentů

1. Hedvi s Patrikem spolu cestovali po měsících Neptunu. S sebou si přivezli airsoftku, pomocí níž chtěli určit poloměr a hmotnost jednoho z měsíců. Když airsoftkou stříleli na Zemi ve vodorovném směru z výšky 1,5 m nad povrchem, náboj urazil 28,3 m než dopadl na zem. Při výstřelu na daném měsíci zjistili, že střela jej oběhne po kruhové orbitě za 3 hodiny, 18 minut a 39 sekund. Následně z těchto údajů určili poloměr a hmotnost tohoto měsíce. Pokuste se o totéž a určete, na kterém měsíci byli.
2. Jakou rychlost musíme dodat satelitu, který obíhá Zemi po geosynchronní orbitě, aby opustil gravitační vliv Země?

⁴<https://cs.wikipedia.org/wiki/Pružina>

1. Pro střelbu na Zemi můžeme využít kinematické rovnice při tíhovém zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Volným pádem spadne kulička z výšky $h = 1,5 \text{ m}$ za čas

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \doteq 0,55 \text{ s}.$$

Jelikož za tuto dobu urazila vzdálenost $l = 28,3 \text{ m}$, musela mít kulička rychlost $v = l/t \doteq 51,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Předpokládejme, že měsíc nemá vlastní atmosféru, nebude tedy docházet ke ztrátám energie vlivem odporu vzduchu, kulička tudíž celou dobu poletí konstantní rychlostí v^5 . Poloměr určíme z doby letu $T = 11919 \text{ s}$ po kruhové orbitě jako

$$2\pi R = vT,$$

$$R = \frac{vT}{2\pi},$$

$$R \doteq 97,1 \text{ km}.$$

Kulička se po kružnici pohybuje 1. kosmickou rychlostí, která je dána vztahem

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}},$$

ze kterého můžeme vyjádřit hmotnost měsíce M :

$$M = \frac{v^2 R}{G} \doteq 3,82 \cdot 10^{18} \text{ kg}.$$

Seznam měsíců Neptunu můžeme najít například na Wikipedii⁶, kde lze zjistit, že nejlépe odpovídá hmotnosti a poloměru měsíc Larissa.

2. Pohybuje-li se sonda po geosynchronní orbitě, neustále se nachází nad stejným místem na Zemi, tedy její perioda oběhu Země je rovna délce jednoho dne $T = 24 \text{ hod} = 86,4 \cdot 10^3 \text{ s}$. Poloměr orbity družice R můžeme určit z rovnosti sil nebo použitím 3. Keplerova zákona:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM},$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}},$$

$$R \doteq 42,27 \cdot 10^3 \text{ km},$$

kde $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ je hmotnost Země. Družice se bude kolem Země pohybovat po kruhové dráze, což odpovídá 1. kosmické rychlosti (v_1). Pro urychlení na 2. kosmickou rychlost (v_2) jí musíme přidat rychlost

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} - \sqrt{\frac{GM}{R}} = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{GM}{R}} \doteq 1,27 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Hedvika Kršková
hedvika.krskova@vyfuk.org

Patrik Kašpárek
patrik.kasperek@vyfuk.org

⁵V opačném případě by ani orbita kuličky nebyla kruhová. Ztráty jsme zanedbali i v případě letu kuličky v tíhovém poli Země, kde odpor vzduchu bezpochyby je. Kulička ovšem stráví ve vzduchu jen málo času, proto předpokládáme, že ji odpor moc nezpomalí.

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Moons_of_Neptune



Pořadí řešitelů po V. sérii

Kompletní výsledky najdete na <https://vyfuk.org>.

Kategorie šestých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	V	Σ
Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	43	215
1. Jan František Lukáš	ZŠ Dr. M. Tyrše Hrdějovice	5	5	6	6	7	6	4	39	187
2. Richard Menšík	G, Boskovice	5	5	3	6	5	4	4	32	173
3. Filip Petrásek	ZŠ Nepomucká, Praha 5	5	5	4	6	5	3	6	34	141
4. Petr Kysela	G, Český Krumlov	3	5	6	4	–	5	–	23	114
5. Jason Sýkora	G K. Čapka, Dobříš	4	5	4	–	5	–	–	18	101
6. Martin Jirout	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	4	1	3	–	–	5	–	13	94
7. Anna Ličková	G, Litoměřická, Praha	5	5	4	–	–	7	6	27	93
8. Melinka Čejpová	Arcibiskupské G, Praha	5	3	2	–	2	–	–	12	89
9. Marek Roučka	ZŠ Dobřany	3	5	–	–	–	4	–	12	81
10. Martina Mrázová	ZŠ Palachova, Brandýs nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	–	77
11. Emilie Kimmerová	ZŠ a MŠ Kotlářská, Brno	1	2	–	–	–	1	–	4	73
12. František Urban	G, Benešov	–	5	–	–	–	6	–	11	70
13. Laura Kvíčalová	ZŠ a MŠ Petra Strozziho Praha 8	–	–	–	–	–	–	–	–	63
14.–15. Karel Olšar	G, Český Krumlov	4	3	1	6	–	–	–	14	59
14.–15. Tobiáš Vágner	G J. Vrchlického, Klatovy	1	0	–	–	–	6	–	7	59
16. Filip Svatoš	Jungmannova ZŠ Beroun 2	–	–	–	–	–	–	–	–	58
17. Tobias Záveský	ZŠ Hornická, Tachov	–	5	–	–	–	–	–	5	54
18. Kristýna Rybková	ZŠ Úvoz, Brno	–	–	–	6	–	–	–	6	53
19. Filip Mayer	ZŠ Svážná, Most	–	–	–	–	–	–	–	–	52
20.–21. Filip Macák	ZŠ a MŠ Třebíz., Kralupy n. V.	1	3	–	–	–	3	–	7	51
20.–21. Ondřej Mendlík	ZŠ a MŠ Nerudova, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	51
22. Marek Tóth	G, Ústí nad Orlicí	2	–	–	–	–	–	–	2	49
23. Monika Pachlopníková	ZŠ Brno, Sirotkova 36	–	–	–	–	–	–	–	–	48
24. Kristýna Kuldová	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	–	44
25.–26. Ema Paseková	Masarykovo G, Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	–	34
25.–26. Martin Rakušan	ZŠ sv. Voršily Praha 1	–	4	–	–	–	–	–	4	34
27. Vojtěch Kubišta	ZŠ Jakuba Arbesa, Most	–	–	–	–	–	–	–	–	33
28. Anna Neumannová	22. základní škola Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	32
29. Elen Kršková	G, Mikulov	–	4	–	–	–	–	–	4	31

Kategorie sedmých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	V	Σ
Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	43	215
1. Oleg Šatánek	ZŠ J. A. Kom. Hradec Králové	5	5	6	6	7	7	5	41	207
2. Lukáš Kopecký	G, Litomyšl	4	5	6	6	4	7	7	39	198
3. Vladimír Kotsch	Gymnázium Sázavská Praha 2	5	5	6	6	5	7	5	39	196
4. Viktorie Snášelová	Masarykovo G, Plzeň	5	5	4	6	5	4	5	34	174
5. Pavel Doskočil	G, Žamberk	5	5	4	4	6	5	4	33	165
6. Blanka Nováková	ZŠ a MŠ Křídlovická, Brno	4	5	4	6	7	6	–	32	152

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	V	Σ
		5	5	6	6	7	7	7	43	215
7.–8. Václav Bláha	ZŠ a MŠ Školní 93., Švihov	0	5	5	5	–	–	–	15	133
7.–8. Anna Přivětivá	G, Litoměřická, Praha	5	5	6	4	2	5	7	34	133
9. Eva Brožovičová	Podkrušnohorské G, Most	4	5	6	6	–	5	1	27	130
10.–12. Kateřina Bartková	G, Brno-Bystrc	3	5	4	4	2	3	–	21	126
10.–12. Pavla Holečková	Jungmannova ZŠ Beroun 2	2	5	4	3	3	6	5	28	126
10.–12. Lukáš Laštovička	G Neumannova, Žďár n. S.	5	5	4	2	2	3	7	28	126
13. Metoděj Šámal	ZŠ ul. 5. května, Liberec 1	4	5	6	6	–	–	3	24	125
14. František Šustr	Fak. ZŠ při PedF UK, Praha 5	5	5	6	6	–	5	4	31	124
15. Thea Pauzerová	Mensa G, Praha 6	5	5	–	6	2	3	–	21	122
16. Lada Vysloužilová	ZŠ Verdunská, Teplice	5	5	6	4	–	–	–	20	119
17. Martin Houška	G a SOŠ, Rokycany	5	5	–	–	–	4	–	14	115
18. Jaroslav Motlík	G Opatov, Praha	3	4	4	–	–	–	–	11	113
19. Tobiáš Radkovský	G prof. J. Patočky, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	105
20. Antonín Vácha	ZŠ Chrudim 3	–	–	–	–	–	–	–	–	104
21. Marie Ježková	ZŠ T. G. Masaryka Rokycany	5	5	4	6	2	4	–	26	103
22. Bartoloměj Stoklasek	ZŠ Troubelice	–	5	6	6	6	–	–	23	99
23. Štěpán Vlasák	G Jiřího z Poděbrad, Poděbrady	2	4	–	–	–	3	–	9	92
24. Natálie Hnětková	G, Benešov	–	5	–	–	–	–	–	5	90
25. Andrea Vaňková	G, Sušice	1	4	1	4	–	–	–	10	84
26.–27. Henryk Berka	G, Roudnice nad Labem	–	5	6	–	–	–	–	11	79
26.–27. Eva Kišová	ZŠ U Vorliny, Vlašim	5	5	–	–	–	–	–	10	79
28. Tomáš Kvapil	PORG, Praha	–	2	–	–	–	–	–	2	76
29.–30. Jan Josef Veselý	Purkyňovo G, Státnice	5	5	–	–	–	–	–	10	72
29.–30. Valentýna Sochorová	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	72
31.–32. Štěpán Hrabina	Jungmannova ZŠ Beroun 2	2	5	–	–	–	–	–	7	69
31.–32. Dita Křížková	Sportovní G, Plzeňská, Kladno	–	4	–	2	–	–	–	6	69
33. Dominik Stoklasek	ZŠ Troubelice	4	–	–	–	–	5	–	9	68
34. Jan Hanousek	ZŠ a MŠ Jičín	–	5	–	–	–	–	–	5	67
35. Jan Kadlec	ZŠ a MŠ Školní 93., Švihov	–	–	–	–	–	–	–	–	66
36. Fabien Bartůněk	G a SOŠP, Čáslav	–	–	–	–	–	–	–	–	65
37.–39. Jan Foldyna	Anglofonní základní škola, z. ú.	2	5	–	–	–	–	–	7	63
37.–39. Alžběta Průšová	G a SOŠ, Rokycany	–	–	–	–	–	–	–	–	63
37.–39. Matěj Vacek	ZŠ T. G. M. Lomnice nad Popelkou	–	5	3	3	–	3	–	14	63
40. Petr Hubený	G K. Čapka, Dobříš	–	4	–	–	–	–	–	4	60
41.–43. Sofie Dusatko	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	2	5	–	–	–	5	–	12	57
41.–43. Kristýna Musilová	ZŠ T. G. Masaryka Mnichovice	–	–	–	–	–	–	–	–	57
41.–43. Adam Šustr	ZŠ Tolstého, Klatovy	–	3	6	–	–	–	–	9	57

Kategorie osmých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	V	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	190
1. Adam Houdek	ZŠ a MŠ, Březová	–	5	6	6	7	7	4	35	184
2. Erik Macek	G Opatov, Praha	–	5	6	6	7	7	7	38	180
3. Matěj Dudek	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	5	6	6	7	5	6	35	178
4. Emma Polcarová	Sportovní G, Plzeňská, Kladno	–	5	6	6	7	7	5	36	172
5. Jan Horský	G, Brno - Řečkovice	–	5	6	6	7	6	6	36	162
6. Roman Velko	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	–	5	4	5	3	7	7	31	155
7. Matěj Křivánek	G, Moravské Budějovice	–	4	6	6	7	7	–	30	153
8. Dario Heinich	G a ZUŠ, Šlapanice	–	5	4	6	5	6	5	31	151
9. Aneta Brzokoupilová	Jungmannova ZŠ Beroun 2	–	5	4	6	7	4	3	29	150

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	V	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	190
10. Rozálie Michaela Furchová	G, Židlochovice	–	5	6	6	3	5	4	29	138
11. Jakub Vávra	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	5	6	6	7	–	–	24	127
12.–13. Květa Bouchalová	G, Olomouc-Hejčín	–	5	6	6	2	7	4	30	124
12.–13. Mariana Hořínková	Wichterlovo G, Ostrava	–	5	6	6	2	4	3	26	124
14. Barbora Petrášková	28. základní škola Plzeň	–	5	4	6	–	3	5	23	119
15. Radim Zikmund	ZŠ Tuchlovice	–	5	4	6	3	0	–	18	117
16. Ondřej Laštovička	G Neumannova, Žďár n. S.	–	5	3	4	2	3	7	24	111
17.–18. Julie Judásková	G a SOŠZE, Vyškov	–	5	6	–	2	–	–	13	107
17.–18. Viktor Novák	Nový PORG, Praha	–	4	6	0	1	5	2	18	107
19. Magdalena Čejpová	Arcibiskupské G, Praha	–	5	6	6	2	–	–	19	104
20.–21. Michal Blahoš	G, Benešov	–	2	6	6	–	–	–	14	100
20.–21. Eliška Knopfová	ZŠ J. A. Kom. Hradec Králové	–	5	–	–	–	–	–	5	100
22. Flora Eisner	G, Litoměřická, Praha	–	5	–	6	–	7	–	18	96
23. Amálie Hlávková	ZŠ, Znojmo, Mládeže 3	–	5	1	–	–	6	–	12	95
24. Michal Jirout	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	–	1	3	3	–	4	–	11	94
25.–26. Dominik Svatoš	G J. Barranda, Beroun	–	–	–	–	–	–	–	–	90
25.–26. Karolína Vtípilová	ZŠ Hrušovany nad Jevišovkou	–	5	3	1	3	3	5	20	90
27. Martina Merglová	Krkonoské G a SOŠ Vrchlabí	–	5	–	6	–	–	–	11	89
28. Antonín Šreiber	ZŠ Skálava, Turnov	–	5	2	1	4	–	5	17	88
29. Vratislav Košina	ZŠ a MŠ Věry Čáslavské, Praha 6	–	3	4	6	2	–	2	17	85
30. Marek Růžicka	G, Brno - Řečkovice	–	0	–	4	–	–	–	4	83
31.–33. Jan Bezděk	ZŠ Náchod - Plhov	–	3	3	4	2	–	2	14	76
31.–33. Jakub Kolář	G Opatov, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	76
31.–33. Lukáš Loukota	G Stříbro	–	5	–	6	–	–	–	11	76
34.–35. Sofie Hana Klímová	G, Brno - Řečkovice	–	5	–	–	1	–	–	6	75
34.–35. Angela Poláchová	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	75
36.–38. Andrea Kozumpliková	Klvaňovo G Kyjov	–	5	3	2	–	–	–	10	74
36.–38. Kristián Mošna	Základní škola Dědina	–	–	–	–	–	–	–	–	74
36.–38. Jan Stábl	ZŠ Bratří Čapků, Ústí nad Orlicí	–	4	3	1	6	–	4	18	74
39. Maria Sidorova	První české G, Karlovy Vary	–	5	1	3	1	6	1	17	72
40. Josef Jaglarz	ZŠ Hrušovany nad Jevišovkou	–	3	3	2	2	–	3	13	71
41. Marek Bauckmann	G K. Čapka, Dobříš	–	–	–	–	–	–	–	–	68
42. Vojtěch Saic	ZŠ a MŠ Dobratická, Praha 9	–	–	–	–	–	–	–	–	66
43. Kateřina Kučerová	G Ústavní, Praha	–	5	–	–	–	–	–	5	64
44. Ondřej Lisický	Podkrušnohorské G, Most	–	5	–	3	–	–	–	8	63
45. Hana Bayerová	G, Slovanské náměstí, Brno	–	5	6	6	–	5	4	26	62
46. Jan Zámečník	Biskupské G, Brno	–	5	–	–	–	4	–	9	61
47. Klára Valentová	Slovanské G, Olomouc	–	3	2	3	–	–	–	8	60

Kategorie devátých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	V	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	190
1. Anna Matiašková	G, Turnov	–	5	6	6	7	7	7	38	184
2. Sámó Šatánek	ZŠ a MŠ Telecí	–	5	6	6	7	7	5	36	182
3.–4. Jana Feldbabelová	ZŠ Jemnice	–	5	6	6	7	7	7	38	180
3.–4. Daniel Přívětivý	G Arcus, Praha	–	5	6	6	7	5	7	36	180
5. Akim Sklenka	G, Žamberk	–	5	6	6	4	7	7	35	179
6. Charlotte Hosszú	G B. Němcové, HK	–	5	6	6	6	5	5	33	174
7. Max Menčík	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	–	5	6	6	7	5	7	36	173
8. Alex Faivre	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	5	4	6	4	7	7	33	170

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	V	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	190
9.–10. <i>Jonáš Fiala</i>	G, Čelákovice	–	3	6	6	7	5	5	32	165
9.–10. <i>Petr Mareš</i>	ZŠ a MŠ Třebíz., Kralupy n. V.	–	5	6	6	1	5	6	29	165
11. <i>Martin Černý</i>	G Teplice	–	5	6	6	2	4	4	27	154
12.–13. <i>Světlana Achedžak</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	4	6	7	7	5	34	151
12.–13. <i>Petr Barták</i>	Slovanské G, Olomouc	–	5	3	4	1	4	–	17	151
14. <i>Alice Dědicová</i>	ZŠ Amálská, Kladno	–	5	4	6	7	6	5	33	150
15. <i>Tamara Dědková</i>	G, Roudnice nad Labem	–	5	3	4	3	4	5	24	148
16. <i>Marie Hrubá</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	2	6	2	5	4	24	147
17.–18. <i>Julie Krěmařová</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	3	5	7	7	5	32	130
17.–18. <i>Matěj Sochor</i>	G prof. J. Patočky, Praha	–	5	6	6	2	5	–	24	130
19. <i>Josef Eliáš Formánek</i>	G, Křenová, Brno	–	5	6	6	–	6	4	27	129
20. <i>Lucie Pinkerová</i>	ZŠ a MŠ Školní, Švihov	–	5	6	6	5	4	6	32	127
21. <i>Hana Dziková</i>	Klvaňovo G Kyjov	–	5	3	6	3	–	–	17	126
22. <i>Martin Podpěra</i>	G Ústavní, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	124
23. <i>Mazmilián Ožana</i>	G F. Hajdy, Ostrava	–	5	6	5	3	6	4	29	122
24. <i>Marie Prokešová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	4	3	2	6	3	23	119
25. <i>Hoang Ngan Nguyen</i>	Klvaňovo G Kyjov	–	4	3	3	4	4	–	18	115
26. <i>Jan Chalupa</i>	ZŠ E. Rošického, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	105
27. <i>Lucie Kolářová</i>	G, Dačice	–	5	2	3	2	3	–	15	100
28. <i>Aneta Kaniová</i>	G Orlová	–	–	–	–	–	–	–	–	92
29. <i>Barbora Samková</i>	ZŠ Prodloužená, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	90
30.–32. <i>Michal Bělohlávek</i>	ZŠ JAK, Karlovy vary	–	3	3	2	2	–	2	12	89
30.–32. <i>Martin Myška</i>	G B. Němcové, HK	–	–	–	–	–	–	–	–	89
30.–32. <i>Nela Žalská</i>	ZŠ Dr. M. Tyrše, Česká Lípa	–	2	2	3	4	1	2	14	89
33. <i>Filip Rezek</i>	G J. Žáka, Jaroměř	–	5	4	6	–	–	–	15	88
34. <i>Dominik Kudr</i>	ZŠ a MŠ Studenec	–	–	–	–	–	–	–	–	85
35. <i>Amaliya Jamgaryan</i>	ZŠ nám. Jiřího z Poděbrad, Praha	–	5	6	6	2	–	–	19	82
36. <i>Martin Vávra</i>	ZŠ O. Březiny Jaroměřice n/R.	–	–	–	–	–	–	–	–	79
37. <i>Matěj Knop</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	75
38. <i>Juraj Štefina</i>	CZŠ sv. Gorazda, Prešov	–	4	3	6	4	4	1	22	74



Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <https://vyfuk.org>

e-mail: vyfuk@vyfuk.org



/ksvyfuk



@ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
 Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.