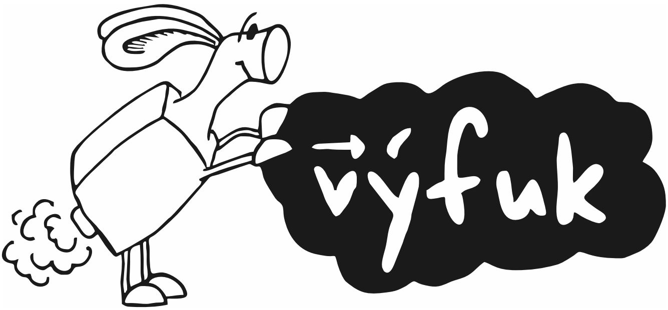


výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

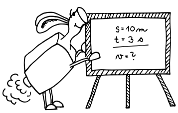
v rukou držíte již čtvrtou brožurku 13. ročníku Výfuku. Tentokrát budete v úlohách hodně cestovat. Uděláte si výlet vlakem z Prahy do Brna, které projezdíte v šalinách. Také se spolu s Výfučkem podíváte do Singapuru a Paramariba. A pátá, již tradičně nejsložitější úloha, se tentokrát věnuje astrofyzice a počítání o hvězdách.

Na konci brožurky též naleznete pořadí po třetí sérii a pololetní výsledkovou listinu, podle které budeme zvát ty nejlepší z vás na letní tábor Výfuku. Ten proběhne od 28. 7. do 10. 8. v Panenské Rozsíčce na Vysočině. S organizátory jsme již vybrali legendu a začali s přípravami. Máte se opravdu na co těšit!

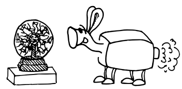
Také již plánujeme jarní setkání, které proběhne v Litoměřicích. Konkrétní datum ještě upřesníme. Sledujte naše sociální sítě nebo web Výfuku, kde v aktualitách zveřejníme datum a upomínku na spuštěnou registraci na tuto akci.

Přejeme mnoho úspěchů v tomto roce!

Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.org`



Zadání IV. série



Termín odeslání: 26. 2. 2024 20.00

Úloha IV.1 ... Předbíháme čas ❻ ❼ — 5 bodů

Výfučkovi se během cesty mezi Singapurem a surinamským hlavním městem Paramaribo podařil husarský kousek – přistál úplně ve stejný čas, jako vzlétl! Rozhodněte, z jakého z měst a kterým směrem (východ/západ) vyletěl, a vypočtěte průměrnou rychlost jeho letu. Předpokládejte, že obě města leží na rovníku a Singapur je na 104° východní délky a Paramaribo na 55° západní délky.

matfyz

Úloha IV.2 ... Účtenka ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Adam nakupoval v Datartu a dostal účtenku dlouhou 43 cm. Koupil tři položky, z nichž každá na účtence zabírá délku 1,5 cm, všechny ostatní části má každá účtenka z Datartu stejné. Kolik nejméně položek by Adam musel koupit, aby jeho nákup zabíral alespoň polovinu délky účtenky? Jak dlouhá by pak účtenka byla?
Bonus: Najděte nejlevnější produkt v Datartu a spočítejte, kolik by takový nákup stál. Předpokládejte, že každý kus je na účtence zvlášť. Nezapomeňte uvést, o jaký produkt se jedná a kolik stál v době, kdy jste jej hledali (cena se může měnit).

Úloha IV.3 ... Šaliny ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Adam jel ze školy a uvažoval o fascinujícím brzdném systému šalin. Obvykle totiž nebrzdí třením, ale zpětným generováním energie za pomoci motorů. Jaký průměrný výkon elektrická síť přijímá při brždění šaliny o hmotnosti 35 t, pokud zastavuje z rychlosti $45\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, brždění trvá 15 s a účinnost rekuperace je 60 %?

Úloha IV.4 ... Vlak Praha-Brno ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Soňa si ve vlaku potřebovala umýt ruce. Když pustila vodu z kohoutku, vlak zrovna zrychloval. První kapka dopadla $x = 1\,\mathrm{cm}$ od středu odtoku, který byl přímo pod kohoutkem. Vypočítejte zrychlení vlaku, jestliže kohoutek je $y = 15\,\mathrm{cm}$ nad odtokem.

Úloha IV.5 ... Hustá hvězda ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů

Výfuček se svou lodí přistál na neznámé planetě daleko v hlubokém vesmíru. V rámci své expedice měl za úkol zjistit hustotu hvězdy, kolem které planeta po kružnici obíhá. Po dlouhé době strávené na planetě však Výfuček při svém bádání zjistil pouze úhlovou velikost hvězdy α a dobu trvání jednoho roku na planetě T. Naštěstí si však uvědomil, že toto mu k určení hustoty hvězdy stačí. Podaří se vám to také?

1. Vyjádřete obecně hustotu hvězdy ρ pomocí její hmotnosti M, úhlové velikosti α a vzdálenosti hvězdy od planety R. Můžete využít předpokladu, že vzdálenost hvězdy od planety R je mnohem větší než poloměr hvězdy r.

2. Označme hmotnost planety m. Jaké síly na planetu při oběhu kolem hvězdy působí? Dokážete z nich vyjádřit vztah mezi veličinami R, M a T (a fyzikálními konstantami)?

3. Určete hustotu hvězdy ρ pouze pomocí naměřených veličin α a T (a fyzikálních konstant).

Úloha IV.E ... Olejujeme ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

V různých mechanických součástkách, jako jsou např. různá kola nebo klouby, se využívá olej ke snížení tření. Vaším úkolem bude vyzkoušet, zda to opravdu funguje.

Najděte doma plechovou plochu (například plech na pečení) a libovolný další předmět (například hrnek, skleničku, plastovou krabičku, ...) a změřte koeficient statického tření mezi plechem a tímto předmětem.

Poté plech i svůj předmět namažte libovolným olejem a opět změřte koeficient tření. Oba výsledky porovnejte a zkuste odhadnout, jak přesně se vám koeficienty podařilo určit. Nezapomeňte také uvést, z jakého materiálu byl druhý vámi použitý předmět.

Úloha IV.V ... Cítíte to napětí? ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

1. Stolní počítač, který je připojen do zásuvky evropského typu (230 V, 50 Hz), má průměrný příkon 60 W. Jaký (efektivní) proud odebírá ze sítě?

2. Dráty vedoucí vysoké napětí z Prahy do Brna mají délku zhruba 230 km. Na jejich začátku je napětí 400 kV, avšak na jejich konci je už jen 395 kV. Pro přenos napětí jsou použity svazky lan hliníku a železa typu AlFe 6 o průřezu 300 mm^2. K jaké ztrátě výkonu dojde na této trase? Potřebné údaje si vyhledejte.

3. Soně byla opět zima, a tak si chtěla v místnosti přitopit elektrickým ohřívačem, který má vnitřní odpor 100 Ω a účinnost 85 %. Při čekání na zahřátí přemýšlela, co by dělala, kdyby neměla přístupnou klasickou zásuvku, ale pouze zásuvku třífázovou. Napadlo ji pouze vytvořit správné napětí pomocí transformátoru. Kolik závitů by musela mít sekundární cívka, jestliže primární cívka má 1 500 závitů a Soňa chce vyhřívat místnost výkonem 500 W?

Výfučtení: Vysoké napětí

S elektřinou se setkáváme každý den. Používáme ji ke svícení, topení, vaření, na provoz počítačů, televizí atd. Ve všech těchto situacích se dostáváme do styku s takzvaným *nízkým napětím* či *velmi nízkým napětím*.

Velmi nízké napětí je dle IEC[1] definováno jako stejnosměrné napětí do 120 V či střídavý proud do 50 V. Do této kategorie tedy spadá většina dnešních chytrých zařízení (bez samotného zdroje, který napětí z běžné zásuvky snižuje). Pokud se bavíme o nízkém napětí, myslíme tím stejnosměrné napětí od 120 V do 1 500 V nebo střídavé napětí od 50 V do 1 000 V. Jedná se o napětí, které najdete v klasických evropských zásuvkách, tedy i ve velkém množství domácích zařízení.[2]

I ve většině podniků a větších zařízeních můžeme tuto kategorii napětí najít v podobě *třífázových zásuvek*, které obsahují napětí 400 V. V takové zásuvce existují 3 vývody střídavého napětí o hodnotě 230 V, každý fázově posunutý o 1/3 periody. Pokud se připojíme na libovolný pár vývodů, dostaneme vždy dvě napětí s posunem 1/3 periody. Celkové napětí při připojení na takovéto 2 vývody je v každém okamžiku rozdíl jejich hodnot. Kdybychom se podívali na grafy napětí v čase, zjistíme, že v některých okamžicích je jeden vývod v kladných hodnotách napětí, kdežto druhý je v záporných a naopak. To nám způsobuje, že výsledné napětí je větší než maximální napětí každého z vývodu, díky čemu je efektivní hodnota 400 V.

[1] Mezinárodní elektrotechnická komise

[2] V tomto odstavci i v celém Výfučtení používáme pro střídavé napětí tzv. hodnoty efektivního napětí, které vyjadřují hodnoty napětí stejnosměrného proudu takové, aby v průměru byla přenesena stejné elektrická energie.

V tomto Výfučtení se však budeme zabývat napětím vysokým, tedy stejnosměrným napětím nad 1 500 V nebo střídavým napětí nad 1 000 V. Používá se v rentgenech, elektrických zapalovačích, elektronkách a jiných zařízení. Jeho největším a nejdůležitějším použitím je však přenos energie.

Přenos elektrické energie

Určitě jste se už někdy setkali s přenosovou sítí elektrické energie. Vysoké stožáry s několika dráty, od kterých jsme učeni se držet dál. Proč se ale používá na přenos energie vysoké napětí a nepoužije se napětí nižší?

Cílem přenosové sítě je, jak název napovídá, přenos velkého množství elektrické energie a tedy přenášení vysokého výkonu. Ten můžeme v případě elektrických zařízení popsat vztahem $P = U \cdot I$, kdy U značí napětí a I proud na zařízení. Chceme-li zvýšit výkon, musíme zvýšit napětí nebo proud (případně obojí).

Uvažme modelovou situaci: máme dlouhý vodič vedoucí ze zdroje elektrické energie připojený na náš modelový spotřebič, který by měl pracovat s výkonem P_s a na konstantním cílovém napětí U_s.[3] Jak můžeme usoudit z předchozího stavu, bude pro proud na spotřebiči platit $I_\mathrm{s} = P_\mathrm{s}/U_\mathrm{s}$. Protože je vodič připojen sériově, bude i na něm proud I_s, tedy $I_\mathrm{v} = I_\mathrm{s}$.

Vodič je poměrně dlouhý a má nezanedbatelný odpor R_v. Jak jsme již řekli, tímto vodičem poteče proud $I_\mathrm{v} = I_\mathrm{s}$. Protože známe tyto dvě informace, můžeme odvodit, že na vodiči bude muset být napětí $U_\mathrm{v} = R_\mathrm{v} \cdot I_\mathrm{v}$. Ze vztahu vidíme, že nezáleží na vstupním či výstupním napětí. Pokud bude výsledný proud stejný, bude na vodiči stejná ztráta napětí.

Nyní by nás zajímalo, jaké ztráty se na vodiči vyskytnou. Ztrátami můžeme chápat všechen výkon, který vodič vyprodukuje v podobě tepla. Pro tento výkon bude platit $P_\mathrm{v} = U_\mathrm{v} \cdot I_\mathrm{v}$, kde P_v je výkon vodiče. Do tohoto vztahu dosadíme dříve odvozenou rovnost pro napětí vodiče a získáváme rovnici

$$P_\mathrm{v} = R_\mathrm{v} \cdot I_\mathrm{v}^2 \,.$$

Vraťme se k našemu modelovému spotřebiči, na kterém bychom chtěli zvýšit výkon. Toho můžeme docílit dvěma způsoby: zvýšit proud na spotřebiči nebo zvýšit napětí, což samozřejmě zvýší energii potřebnou k přenesení přes vodič. Jak jsme již ukázali, na napětí na vodiči v otázce přenosu energie nezáleží. V případě, že bychom zvýšili napětí na spotřebiči a proud ponechali, tak se na samotném vodiči a jeho ztrátách nic nezmění. Povedlo se nám tak přenést více energie bez toho, aniž bychom zvýšili ztráty vyprodukované po cestě.

Naopak kdybychom zvýšili proud a ponechali napětí, nutně tím zvýšíme i proud na vodiči, což způsobí zvýšení výkonu na vodiči a budeme zbytečně ztrácet více energie. Všimněme si také, že ve vztahu výkonu vodiče figuruje proud s druhou mocninou. Pokud bychom zvětšili proud na spotřebiči 2krát, zvýší se nám celková ztráta energie dokonce 4krát.

Odpor vodiče

Otázkou však zůstává: proč se nepoužívá jen jedna úroveň vysokého napětí, ale je jich více? A proč vídáme tlustší kabely na stožárech s vyšším napětím? Odpovědí na obě tyto otázky je

[3] V reálném světě všechny spotřebiče, které používáme, předpokládají konstantní vstupní napětí. Není to jen z důvodu přenosu energie, ale hlavně z praktických důvodů použitých elektrických součástek. Ty obvykle pracují na nějaké bezpečné hodnotě napětí a je potřeba interně vstupní napětí převádět na jiné hodnoty. Zároveň při překročení maximálních hodnot napětí je možné, že součástka shoří či dokonce exploduje. Naopak měnit proud na jiné hodnoty obvykle součástky zvládají bez problému – samozřejmě v rozumných mezích.

odpor vodiče. Ten je závislý na několika vlastnostech vodiče: na délce l, průřezu S a měrném elektrickém odporu ρ ($[\rho] = \Omega{\cdot}\mathrm{m}$).

Čím delší budeme mít vodič, tím větším množstvím materiálu budou elektrony nuceny projít, což bude mít za následek vyšší odpor. Odpor R tedy bude lineárně záviset na délce. Obdobně je na tom měrný elektrický odpor: čím vyšší bude, tím vyšší bude výsledný odpor, takže R je přímo úměrné ρ. Nakonec, čím větší plochu elektronům poskytneme pro prostup, tím lépe budou procházet. Na rozdíl od l a ρ je R nepřímo úměrné S. Tímto dostáváme vztah pro odpor vodiče

$$R = \rho \frac{l}{S} \,.$$

Můžeme vidět, že čím delší vodič, tím vyšší odpor, tedy bychom při přenosu energie měli vyšší ztráty. Abychom tedy při přenosu na delší vzdálenosti snížili ztráty, zvýšíme napětí (čímž snížíme proud) a zvětšíme průřez. Bohužel s rostoucím napětím roste i cena vybudování dané infrastruktury. Proto není využito jen jedno napětí, ale pokud je to možné, použije se napětí nižší, hlavně pokud nepřenášíme energii na velkou vzdálenost. Proto úroveň 400 kV je používána pro páteřní spoje, úroveň 220 kV pro spojení menšího významu a 110 kV pro lokální distribuci elektrické energie.[4]

Transformátory

Ke změně hodnoty napětí nám slouží transformátory. Zařízení fungují na principu takzvané elektromagnetické indukce. Využívá dvou základních poznatků o interakci elektrického a magnetického pole:

1. Spolu s elektrickým polem vzniká pole magnetické reagující na jeho změny. Se střídavým proudem proto vzniká proměnné magnetické pole, zatímco se stejnosměrným neproměnné.

2. Nachází-li se (uzavřená) vodivá cívka v proměnném magnetickém poli, začne jí procházet střídavý elektrický proud.

Transformátor má jádro ve tvaru „U“ tvořené kovovými pláty z feromagnetického[5] materiálu zesilujícího indukované magnetické pole. Na něm jsou namotány navzájem elektricky izolované cívky. Takzvanou primární cívkou prochází původní střídavý proud a vyvolává nestacionární magnetické pole. Proto začne sekundární cívkou, zapojenou v druhém obvodu, procházet střídavý elektrický proud.

Poměr napětí na cívkách v případě ideálního transformátoru přímo odpovídá poměru počtu závitů cívek. Vztah vychází z Faradayova[6] indukčního zákona, ten však přesahuje rámec Výfučtení:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \,,$$

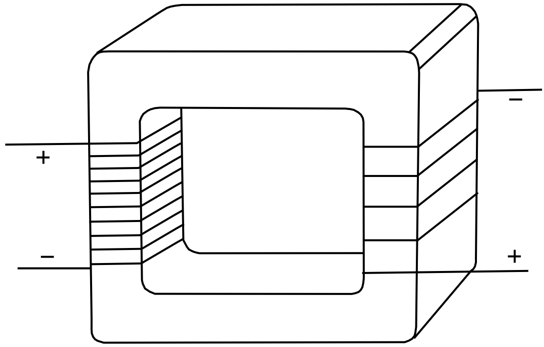
U_1 je napětí a N_1 počet závitů na primární cívce, U_2 a N_2 totéž pro sekundární cívku.

Ve skutečných transformátorech ale dochází různými cestami ke ztrátám. Energie se přeměňuje na teplo, zajišťuje změnu pólů feromagnetického materiálu atd. Přesto se účinnost většiny

[4] `https://www.ote-cr.cz/cs/statistika/elektrizacni-soustava-cr.png`

[5] Feromagnetický materiál je ten, na kterém dobře drží magnety, protože se v blízkosti magnetického pole zmagnetizuje, sám o sobě však magnetický není.

[6] Pokud se chcete o Michaelu Faradayovi dozvědět více, doporučujeme Výfučtení 5. série 8. ročníku. `https://vyfuk.org/_media/ulohy/r8/vyfucteni/vyfucteni_5.pdf`



Obrázek 1: Jádro transformátoru

transformátorů pohybuje nad hranicí 85 % a u moderních dosahují ztráty dokonce jen desetin procenta. Transformátory stavěné pro rozvod energie z elektráren mají rozměry až několik metrů. Zařízení se však využívají i v daleko menší podobě pro operování s nižšími hodnotami napětí. Najdeme je například v zástrčkách, nabíjecích kabelech či v domácích spotřebičích v blízkosti vody. Zde napětí snižují z důvodu nízké spotřeby, ale také kvůli bezpečnosti.

Nebezpečí vysokého napětí

Lidské tělo není izolant, a proto může dojít k úrazu elektrickým proudem. Míru vážnosti pak významně ovlivňuje druh proudu, jeho intenzita, napětí a doba vystavení. V klasických evropských zásuvkách je napětí 230 V, což je pro nás při dotyku již smrtelné. U vyšších napěťových hodnot může proud při zkratu „přeskočit“ vzdálenost několika centimetrů a zapojit tělo do elektrického obvodu. (Jev způsobuje tzv. obloukový výboj, o kterém se můžete dočíst v sekci Výboje.)

U vedení vysokého napětí nemusí ani dojít k průchodu proudu tělem, protože negativně působí i pobyt v silném elektrickém poli. Z toho důvodu se v okolí vedení vysokého napětí, elektrických stanic a výroben elektřiny zavádějí ochranná pásma délky jednotek až nižších desítek metrů.

Nebezpečí na životě

Jako horní hranice bezpečných hodnot proudu se udává 3,5 mA pro střídavý a 10 mA pro stejnosměrný proud. Pro bezpečné napětí pak platí meze 50 V pro střídavé a 120 V pro stejnosměrné, dříve zmíněné rozmezí velmi nízkého napětí. U vyšších hodnot nastávají křeče a může dojít k ochrnutí, přerušení krevního oběhu, narušení srdečního rytmu či k úplné zástavě srdce.

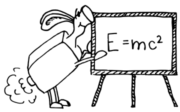
Výboje

Riziko se pojí i s elektrickými výboji. V plynech s velkou kinetickou energií částic si molekuly a atomy srážkami vytrhávají elektrony, čímž získají náboj a ztrácí elektrickou neutrálnost. Může tedy dojít k přenosu elektrického náboje, což pozorujeme jako elektrický výboj doprovázený světelným zářením.

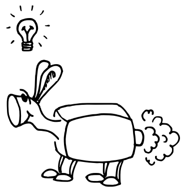
V přírodě se s ním můžeme setkat v podobě blesku, který vzniká mezi opačně nabitými oblaky nebo oblakem a zemí. Uměle ho vyvolává Van de Graafův generátor, který nechá opačně nabít dvě kovové koule a při přiblížení mezi nimi přeskočí jiskra. Za zmínku stojí také obloukový výboj. Ten nastává, když zkratem přerušíme obvod, vzduch okolo se kvůli vysoké teplotě vedení nabije a dál pak vede proud obvodem. Tohoto principu se využívá například v zářivkách, obloukových lampách nebo při svařování.

Adam Krška
adam.krska@vyfuk.org

Michaela Urbanová
michaela.urbanova@vyfuk.org



Řešení III. série



Úloha III.1 ... Chceš k tomu i hadr?

5 bodů; průměr 4,64; řešilo 81 studentů

Soňa potřebovala na stánek s experimenty válcový lavor s poloměrem podstavy 40 cm. Její stánek za den navštívilo $x = 220$ dětí, které chodily v pravidelných intervalech, a každé dítě při experimentu vycákalo část vody z lavoru. Kolik vody v průměru vycákalo jedno dítě, jestliže ráno byla v lavoru hladina vody ve výšce $h = 15\,\mathrm{cm}$, večer ve výšce $h_1 = 3\,\mathrm{cm}$ a Soňa v průběhu dne dolila do lavoru $n = 30$ lahví s objemem 1,5 litru?

Po jaké době si Soňa musí vysušit hadr, pokud zvládne nasát $V_\mathrm{h} = 0{,}75\,\mathrm{l}$ vycákané vody? Uvažujte, že je voda z lavoru vycákávána přibližně rovnoměrnou rychlostí a že hadr sám od sebe neschne. Celá akce trvala 5 hodin.

Nejprve musíme spočítat, kolik vody děti dohromady vylily. To odpovídá množství vody, které od rána z lavoru ubylo, a veškeré vodě v přinesených lahvích. Děti cákáním snížily hladinu vody z $h = 15\,\mathrm{cm}$ na $h_1 = 3\,\mathrm{cm}$, tedy o

$$\Delta h = h - h_1 = 15\,\mathrm{cm} - 3\,\mathrm{cm} = 12\,\mathrm{cm}\,.$$

Objem této vody spočteme jako objem válce o výšce Δh a poloměru podstavy $r = 40\,\mathrm{cm}$.

$$V_1 = \pi r^2 \Delta h = \pi \cdot (40\,\mathrm{cm})^2 \cdot 12\,\mathrm{cm} \doteq 60\,319\,\mathrm{cm}^3 \doteq 60\,\mathrm{l}$$

K tomu přičteme objem vody V_2, kterou Soňa dolila z $n = 30$ lahví o objemu $V_\mathrm{lahve} = 1{,}5\,\mathrm{l}$.

$$V_2 = nV_\mathrm{lahve} = 30 \cdot 1{,}5\,\mathrm{l} = 45\,\mathrm{l}\,.$$

Celkové množství vylité vody tedy bude

$$V = V_1 + V_2 \doteq 60\,\mathrm{l} + 45\,\mathrm{l} = 105\,\mathrm{l}\,.$$

Ke stánku přišlo za celou akci $x = 220$ dětí. Jedno dítě tedy v průměru vycákalo vodu o objemu

$$V_\mathrm{p} = \frac{V}{x} = \frac{105\,\mathrm{l}}{220} \doteq 0{,}48\,\mathrm{l}\,.$$

Nyní zjistíme, jak často bude muset Soňa ždímat hadr. Počet y potřebných vysušení hadru vypočítáme vydělením celkového objemu vycákané vody V a objemu vody V_h, který dokáže hadr nasáknout.

$$y = \frac{V}{V_\mathrm{h}} \doteq \frac{105\,\mathrm{l}}{0{,}75\,\mathrm{l}} = 140$$

Během akce, která trvala $t = 5\,\mathrm{h} = 300\,\mathrm{min}$ tedy musela Soňa hadr ždímat každé

$$t_\mathrm{z} = \frac{t}{y} = \frac{300\,\mathrm{min}}{140} \doteq 2{,}14\,\mathrm{min}.$$

Jedno dítě v průměru vycákalo přibližně $0{,}48\,\mathrm{l}$ vody a Soňa musela hadr ždímat průměrně po 2 minutách a 8 vteřinách.

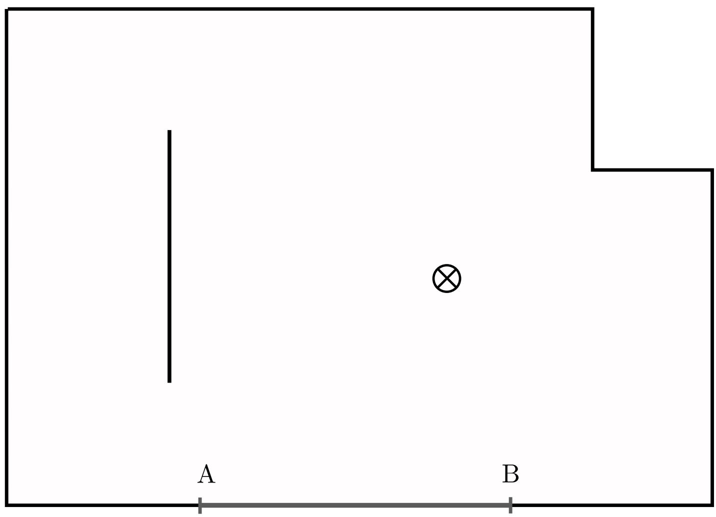
Jakub Savula
jakub.savula@vyfuk.org

Úloha III.2 ... Plátno a žárovka

5 bodů; průměr 3,18; řešilo 422 studentů

Viktor si na koleje koupil plátno, aby zde mohl organizátorům Výfuku promítat filmy. Když měl rozsvíceno a stáhl plátno, všiml si, že plátno částečně zastíní světlo ze žárovky a díky zrcadlu umístěnému v místnosti vznikají zajímavé obrazce. Vyznačte do nákresu Viktorova pokoje části stěn, na které bude dopadat stín plátna. Řešení vypracujte graficky tak, aby byl jasný váš geometrický postup.

Nápověda: *Pro vyznačení všech důležitých paprsků budete potřebovat mít pod obrázkem trochu místa.*



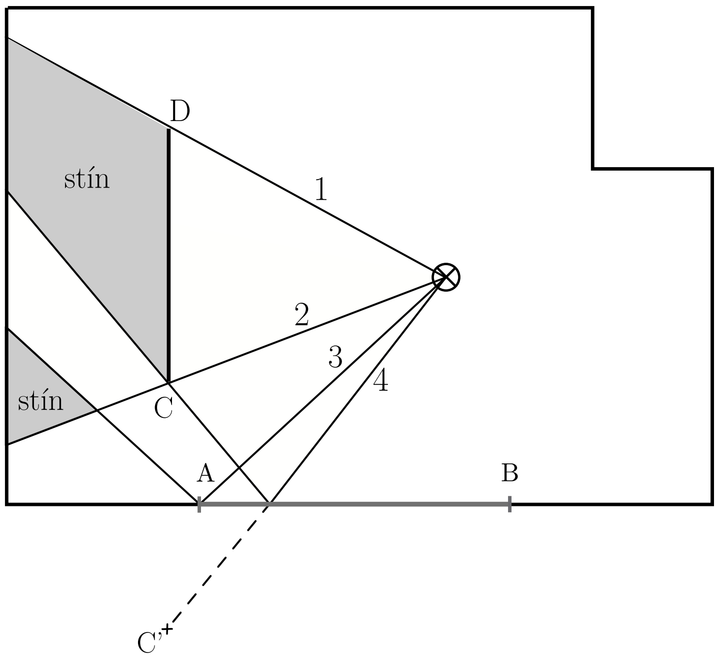
Obrázek 2: Nákres Viktorova pokoje se zaznačeným plátnem, žárovkou a zrcadlem, které je mezi body A a B

Při řešení této úlohy se budeme na žárovku dívat jako na zdroj, který vysílá do všech směrů světelné paprsky, jež se nadále šíří přímo. Nebude zde docházet k žádným ohybům, pouze k odrazu na zrcadle. Pro vyřešení úlohy si zaznačíme do schématu několik význačných paprsků, podle nichž pak určíme hledaný stín.

Začněme nejdříve řešením situace, kdy nebudeme brát v potaz zrcadlo v místnosti. Význačnými paprsky pro nás budou ty, které procházejí těsně u hrany plátna. Uděláme tedy spojnice žárovky s konci plátna C a D, čímž získáme paprsky 1 a 2. Ty nám budou vymezovat oblast stínu za plátnem v případě, že neuvažujeme zrcadlo.

Podívejme se teď, jaký má v úloze vliv zrcadlo. Paprsek dopadající do bodu A, se odrazí tak, že osvítí část, kterou jsme bez uvažování zrcadla označili za tmavou. Vlivem zrcadla se tedy ve stínu objeví jakási osvětlená mezera. Nyní budeme chtít najít další hraniční paprsek – takový, který po odrazu prochází těsně u hrany plátna, neboli bodem C. K tomu si sestrojíme obraz bodu C podle osy, která je dána zrcadlem AB. Tím získáme bod C', do kterého bude mířit paprsek 4. Ten se na zrcadle odrazí tak, že projde bodem C. Tímto získáváme osvětlenou část mezi paprsky 3 a 4.

Snadnou geometrickou konstrukcí a aplikací pravidla, že úhel dopadu se rovná úhlu odrazu, jsme tedy nalezli místa, kam plátno vrhá stín (viz obrázek 3).



Obrázek 3: Geometrické řešení úlohy zkonstruované podle postupu popsaného v řešení. Šedá oblast představuje stín – tedy stěny, jichž se dotýká, budou ty neosvětlené.

Lukáš Linhart
`lukas.linhart@vyfuk.org`

Úloha III.3 ... Zrcadlo v autobusu

6 bodů; průměr 3,75; řešilo 180 studentů

Viktor seděl v autobusu jedoucím rychlostí $v_1 = 60\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a držel zrcadlo kolmo na směr jízdy se zrcadlící plochou směřující dozadu (tedy na zadní část autobusu). Najednou si všiml, že autobus začalo předjíždět auto jedoucí rychlostí $v_2 = 80\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Jak rychle se v zrcadle pohyboval obraz auta vzhledem k Viktorovi sedícímu v autobuse a vzhledem k chodci, který stojí na přechodu a kolem kterého autobus právě projíždí?

Pro zodpovězení první otázky nás zajímá relativní rychlost auta a autobusu v_δ. Tu si můžeme spočítat jako rozdíl rychlostí obou dopravních prostředků

$$v_\delta = v_2 - v_1 = 80\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} - 60\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} = 20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Obraz auta se vzhledem k Viktorovi pohyboval rychlostí $v_\delta = 20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Rychlost pohybu obrazu je v rovinném zrcadle je totiž stejná jako rychlost pohybu odpovídajícího předmětu.

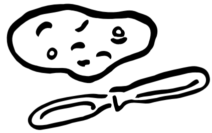
Vzhledem k chodci se zrcadlo pohybuje rychlostí v_1 a obraz v něm se pohybuje opačným směrem rychlostí v_δ. Tím pádem se obraz auta v zrcadle vzhledem k chodci pohybuje rychlostí

$$v_3 = v_1 - v_\delta = 60\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} - 20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} = 40\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Viktor Materna
viktor.materna@vyfuk.org

Úloha III.4 ... Loupání brambor

6 bodů; průměr 4,42; řešilo 204 studentů



Jirkovi začaly pomalu docházet brambory. Už nezbyly žádné velké, ale jen několik malých. Všiml si, že mu loupání těchto malých brambor zabere déle. Spočítejte, jak dlouho mu potrvá oloupat půl kila malých brambor, jestliže mu půl kila velkých brambor zabralo přibližně 15 minut. Předpokládejte, že mají všechny brambory přibližně stejný tvar a že malé brambory jsou dvakrát menší (tj. mají dvakrát menší rozměry). Jirka loupe danou velikost povrchu vždy stejně rychle, nezávisle na velikosti brambor.

Pro účely snazšího výpočtu budeme uvažovat, že brambory jsou kulaté a všechny velké brambory mají stejný poloměr R a všechny malé mají poloměr $R/2$. Všechny naše úvahy a výpočty lze ovšem zobecnit na tělesa jakéhokoli tvaru (viz komentář na konci řešení). Naše řešení tedy bude stále plně platné, výsledek platí obecně. Pro jednu bramboru o poloměru R platí následující vztahy pro povrch a objem:

$$S_0 = 4\pi R^2\,,$$
$$V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3\,.$$

Kombinací těchto vztahů získáme rovnost

$$V_0 = \frac{R}{3} S_0\,.$$

Rovnost jsme odvodili pro libovolnou bramboru, platí tedy bez výjimky pro všechny. Když sečteme objemy všech brambor, tak dostaneme stejnou rovnost pro jejich celkový objem V a celkovou plochu S (zde využíváme předpoklad, že mají všechny stejný poloměr)

$$V = \frac{R}{3} S\,.$$

Předpokládáme, že velké i malé brambory mají stejnou hustotu, a tedy 0,5 kg velkých brambor bude mít stejný objem jako 0,5 kg malých brambor. Z toho dostáváme

$$V = \frac{R}{3} S_\mathrm{v} = \frac{R/2}{3} S_\mathrm{m} = \frac{R}{6} S_\mathrm{m}\,,$$

neboli

$$S_\mathrm{m} = 2 S_\mathrm{v}\,.$$

Protože Jirka loupe daný povrch stejně rychle nezávisle na velikosti brambor, bude mu loupání malých brambor trvat dvakrát déle než velkých brambor, tedy 30 minut.

Poznámky k obecnému řešení

Uvažujme těleso libovolného tvaru. Jeho objem a povrch mají zajímavou obecnou vlastnost, že povrch je přímo úměrný druhé mocnině jeho „rozměrů“ a objem přímo úměrný třetí mocnině. Pokud tedy zvětšíme rozměry 2krát, zvětší se povrch 4krát a objem 8krát.

Tuto vlastnost můžeme snadno ověřit u těles, pro která známe vzorečky na výpočet objemu. Například pro krychli platí $S = 6a^2$, $V = a^3$, pro kouli pak $S = 4\pi r^2$, $V = 4\pi r^3/3$, kde dosazením $2a$, $2r$ místo a, r můžeme ověřit zmíněnou vlastnost.

Co ovšem myslíme slovem rozměr pro tělesa komplikovaného tvaru, jako například brambora? A co když neumíme jejich povrch a objem spočítat pomocí vzorečku? Pomocí pokročilé matematiky lze ukázat, že nám to vůbec nevadí. Uvažujme libovolnou *množinu* těles (například pytel brambor) neznámých tvarů. Pokud nyní všem zdvojnásobíme nějaký jejich rozměr tak, že zachováme tvary (tím vlastně zdvojnásobíme každý možný rozměr), tak bude platit, že se celkový objem zvětší 8krát a plocha 4krát.

Pak už postupujeme sérií jednoduchých úvah. Daný počet malých brambor má 4krát menší plochu a 8krát menší objem. Aby jich tedy bylo co do hmotnosti stejně jako velkých, musí jich být 8krát víc co do počtu a tedy bude jejich celková plocha 2krát větší.

David Chudožilov
david.chudozilov@vyfuk.org

Úloha III.5 ... Svinovací metr

7 bodů; průměr 3,99; řešilo 84 studentů

Patrik vzal do ruky svinovací metr o délce 5 m *a celkové hmotnosti* $m_\mathrm{c} = 250\,\mathrm{g}$. *Následně ho pustil dolů z vysoké zídky, přičemž stupnici držel za kovový konec. Stupnice metru se při pádu postupně odmotávala, dokud se svinovací metr nezastavil a na stupnici se ukázalo číslo* $l = 75\,\mathrm{cm}$.

Představme si, že uvnitř svinovacího metru se nachází pružina smotaná do tvaru šroubovice. Pružina je připevněna ke konci stupnice, takže když se metr odmotává, smotaná pružina se „otáčí“ (fyzicky se natahuje, ale jelikož je smotaná do šroubovice, můžeme říct, že se její *konec otáčí). Síla, kterou působí proti odmotání metru, je úměrná úhlu, o který byla otočena z rovnovážné pozice, tj. velikost síly je $k_\alpha \cdot \alpha$, kde α je úhel ve stupních.*

Následně Patrik metr rozebral a zjistil, že hmotnost těla metru, tedy bez srolované stupnice, je $m_\mathrm{t} = 105\,\mathrm{g}$ a poloměr šroubovice je $r = 2{,}25\,\mathrm{cm}$ (stupnice je srolovaná do spirály o stejném poloměru jako pružina).

1. *Určete délkovou hustotu kovové stupnice metru.*
2. *Určete úhlovou tuhost pružiny k_α uvnitř metru a sílu, kterou při zastavení pružina působila.*
3. *Spočítejte práci, kterou vykonaly třecí síly při odmotávání metru.*

Uvažujte, že třecí síly jsou úměrné rychlosti, tedy působí pouze při odmotávání metru. Když se metr nepohybuje, jsou třecí síly nulové.
Nápověda: *Berte v potaz, že jestliže je síla pružiny přímo úměrná jejímu otočení, pak je i přímo úměrná délce odmotané části metru – chová se tedy podobně jako obyčejné pružiny.*

1. Délková hustota λ je definovaná jako podíl hmotnosti daného úseku a jeho délky. Ze zadání víme, že hmotnost kovové stupnice je rozdíl celkové hmotnosti metru a hmotnosti jeho těla $m_\mathrm{s} = m_\mathrm{c} - m_\mathrm{t} = 145\,\mathrm{g}$ a její celková délka je $h = 5\,\mathrm{m}$. Délková hustota stupnice je
$$\lambda = \frac{m_\mathrm{c} - m_\mathrm{t}}{h} = \frac{145}{5}\,\mathrm{g{\cdot}m^{-1}} = 29\,\mathrm{g{\cdot}m^{-1}}\,.$$

2. Svinovací metr se dostane do klidové pozice, když síla vyvolaná pružinou vyrovná tíhovou sílu působící na metr s neodrolovanou částí stupnice uvnitř. Tíhová síla působící na metr tudíž bude
$$F_\mathrm{g} = mg = (m_\mathrm{c} - l\lambda)g = \frac{250 - 0{,}75 \cdot 29}{1000} \cdot 9{,}81\,\mathrm{N} = 2{,}24\,\mathrm{N}\,.$$
Proti síle tíhové působí síla pružiny, která má podle zadání tvar
$$F_\mathrm{p} = k_\alpha \alpha\,,$$
kde α je úhel, o který je odrolovaná stupnice z klidové polohy. Z geometrie kružnice umíme vyjádřit úhel jako $\alpha = 360° \cdot l/2\pi r$. Úhlová tuhost pružiny tudíž bude
$$\begin{aligned} F_\mathrm{g} &= F_\mathrm{p}\,,\\ (m_c - l\lambda)g &= \frac{k_\alpha l}{r} \cdot \frac{360°}{2\pi}\,,\\ k_\alpha &= \frac{2\pi r}{360°} \cdot \frac{(m_c - l\lambda)g}{l}\,,\\ k_\alpha &\doteq 1{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N{\cdot}deg^{-1}}\,. \end{aligned}$$
Jednotkou $\mathrm{N{\cdot}deg^{-1}}$ rozumíme Newton na stupeň.

3. Práci určíme jako rozdíl potenciálních energií v okamžiku, kdy má Patrik metr ještě v ruce a kdy je metr rozvinutý
$$W = \Delta E_\mathrm{p} = E_\mathrm{p0} - E_\mathrm{p1}\,.$$
Když má Patrik metr ještě v ruce, tak je veškerá jeho energie uložena v potenciální tíhové energii $E_\mathrm{p0} = m_\mathrm{c} g l$, kde za nulovou hladinu potenciální energie bereme výšku, kde se zastaví rozvinutý metr. Energie rozvinutého metru je uložena ve dvou druzích potenciální energie – v tíhové a v energii pružnosti. K potenciální energii tíhové přispívá pouze část rozvinuté železné stupnice, o hmotnosti λl, jelikož zbytek metru se nachází ve výšce nulové referenční hladiny E_p. Rozvinutá část stupnice má těžiště ve výšce $l/2$, proto je její potenciální energie
$$\lambda l g \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2}\lambda g l^2\,.$$
Potenciální energie pružnosti je uložena v napnuté pružině. Pro ni, obdobně jako pro obyčejnou pružinu, platí
$$E_\mathrm{pp} = \frac{1}{2} k l^2\,,$$
kde součin kl známe z 2. podúlohy a rovná se tíhové síle nerozvinuté části metru. Po vložení všech poznatků do rozdílů energií určíme vykonanou práci
$$W = m_\mathrm{c} g l - \left(\frac{1}{2}\lambda g l^2 + \frac{1}{2}\left(m_c - l\lambda\right) g l\right) = \frac{1}{2} m_c g l \doteq 0{,}92\,\mathrm{J}\,.$$

Patrik Kašpárek
`patrik.kasparek@vyfuk.org`

Úloha III.E ... Zanedbat, či nezanedbat 7 bodů; průměr 4,95; řešilo 115 studentů

Ze školy víme, že všechna tělesa na zem „padají“ stejně rychle. To však platí pouze ve smyslu tíhového zrychlení. V důsledku odporu vzduchu pochopitelně bude například cihla padat rychleji než pírko. Jak je to však s předměty se stejným tvarem, které se liší pouze hmotností?

Vyrobte si dva identické, ale různě těžké míčky (např. naplněním jednoho tenisového nebo pingpongového míčku matkami), pusťte je z velké výšky a změřte rozdíl časů dopadu. Měřením doby pádu pro různé počáteční výšky určete výšku, pro kterou je již rozdíl dob pádu znatelný a odpor vzduchu tedy není zanedbatelný.

Teorie

Odpor vzduchu můžeme při malých rychlostech a malém časovém úseku zanedbat, protože odporová síla F je přímo úměrná druhé mocnině rychlosti pohybu tělesa jako $F = kv^2$. Když se těleso pohybuje pomalu, nenabere dostatečnou rychlost a odpor vzduchu není znatelný. Ovšem když těleso pustíme z dostatečně velké výšky, zrychlí na rychlost, při které odpor vzduchu již zanedbatelný nebude.

Veličina k je koeficient odporu vzduchu, který zahrnuje všechny faktory pro konkrétní situaci (hustota vzduchu, plocha a tvar tělesa). Protože zahrnuté hodnoty jsou pro oba námi vybrané míčky stejné, bude se jejich pohyb odvíjet pouze od jejich hmotnosti, která vystupuje v tíhové síle $F_\mathrm{g} = mg$, jež urychluje předměty směrem k zemi.

výška / m	1,5		3		4,5	
n	$t_{\text{težší}}$ / s	$t_{\text{lehčí}}$ / s	$t_{\text{težší}}$ / s	$t_{\text{lehčí}}$ / s	$t_{\text{težší}}$ / s	$t_{\text{lehčí}}$ / s
1	0,52	0,51	0,76	1,02	1,12	1,22
2	0,5	0,56	0,84	0,81	1,07	1,28
3	0,64	0,57	0,8	0,73	0,9	1,23
4	0,58	0,58	0,68	0,8	1,01	1,25
5	0,51	0,53	0,7	0,79	1,05	1,25
$\bar{t}$/s	0,55	0,55	0,76	0,83	1,03	1,25
Δt/s	—		0,07		0,22	
t_0/s	0,55 s		0,78 s		0,96	

Tabulka 1: Naměřené hodnoty

Z toho také můžeme odvodit, že na tělesa stejného tvaru bude působit vždy stejná odporová síla. Při různé hmotnosti tak budou padat jinak rychle. Pokud bychom měli dva stejné kvádříky jiné hmotnosti, těžší kvádřík bude padat rychleji, protože na něj bude působit větší tíhová síla.

V našem experimentu očekáváme, že když budeme míčky pouštět z velké výšky, těžší míček dopadne dříve nežli lehčí míček, což bude způsobeno nezanedbatelným odporem vzduchu. Měřením se pokusíme stanovit hranici výšky, při které bude rozdíl časů dopadů již nezanedbatelný.

Měření

Připravíme si dva identické míčky o různých hmotnostech a najdeme nějaké vhodné místo, ze kterého budeme míčky pouštět na zem. Budeme je pouštět z postupně větších a větších výšek a budeme měřit dobu jejich pádu. Měření budeme několikrát opakovat pro různé výšky, dokud se nám nezačne čas dostatečně lišit (stačí, když se čas bude lišit například o 15 %).

My jsme si připravili dva míčky velikosti tenisového míčku a jeden z nich jsme naplnili pískem. Míčky měly poloměr 6 cm, lehčí vážil 5 g a těžší 210 g.

Míčky jsme pouštěli ze tří výšek – 1,5 m, 3 m a 4,5 m. Dobu pádu jsme měřili pomocí stopek a měření jsme pro každou výšku opakovali pětkrát. Doby pádu jsme zprůměrovali a porovnali mezi sebou. Hodnoty, které jsme naměřili, jsme zaznamenali do tabulky 1.

Chtěli bychom ještě porovnat naše výsledky s nějakým teoretickým odhadem. V situaci bez odporu vzduchu zrychlují oba míčky se zrychlením g, doba t_0, za kterou překonají výšku h, je tedy rovna

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Vypočítané doby t_0 jsou uvedeny pro srovnání v posledním řádku tabulky 1.

U hodnoty 1,5 m si všimněme, že časy pádu jsou po zprůměrování téměř identické, odpor vzduchu tedy nemusíme započítávat. U tří metrů se časy pro lehčí a těžší míček liší o 0,07 s. To je stále velmi malý rozdíl, je například menší než reakční čas člověka. Navíc vypočtená doba pádu se zanedbaným odporem vzduchu vyšla větší než čas změřený pro malý míček, to je pravděpodobně danou chybou měření (reakční doba člověka). Chyba měření je tedy srovnatelná s rozdílem doby pádu pro oba míčky, proto uvažujeme, že zde je ještě odpor zanedbatelný.

Při čtyřech a půl metrech se časy pádů míčků liší o více než 20 %, čas pádu těžšího míčku je znatelně větší než teoreticky vypočtená doba t_0 pro zanedbaný odpor. Můžeme tedy říci, že při pouštění míčků z takové výšky je již odpor vzduchu nezanedbatelný.

Závěr

Odpor vzduchu nemůžeme pro námi zvolený typ míčku zanedbat od přibližně 4,5 m, protože se časy dopadu pro různé hmotnosti míčku liší o více než 20 %.

Alena Mouchová
alena.mouchova@vyfuk.org

Úloha III.V ... Plavu, plaveš, plaveme

7 bodů; průměr 4,73; řešilo 161 studentů

1. *Na Měsíci působí na pytel brambor tíhová síla* 81 N. *Jakou hmotnost má pytel a jaká je jeho tíha na Zemi?*
2. *Kus oceli na vodě neplove, ocelový tanker však ano. Mějme tanker o hmotnosti* 45 000 t. *Jaký minimální objem musí tanker mít, aby mohl plovat na vodě?*
3. *Výfuček si hrál v umyvadle s pirátskou lodí. Původně měl zlatý poklad položený v lodi, pak ho ale napadlo, že by piráti poklad lépe schovali, kdyby ho připevnili pod loď. Pokud Výfuček přiváže na loď poklad zespodu, co se stane s hladinou vody v umyvadle – klesne, stoupne, nebo zůstane stejná?*
4. *Kvádr korku o hustotě* $\rho = 520\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ *a rozměrech* $10\,\mathrm{cm} \times 10\,\mathrm{cm} \times 15\,\mathrm{cm}$ *položíme do akvária o rozměrech podstavy* $12\,\mathrm{cm} \times 12\,\mathrm{cm}$, *ve kterém je* 0,78 l *vody. Bude kvádr plovat? Odpověď odůvodněte.*

1. Pro výpočet hmotnosti pytle využijeme vztah

   $$m = \frac{F_\mathrm{M}}{g_\mathrm{M}}\,,$$

   kde F_M je tíhová síla působící na pytel na Měsíci ze zadání a $g_\mathrm{M} = 1{,}62\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je tíhové zrychlení na Měsíci.[7] Po dosazení získáme hmotnost pytle $m \doteq 50\,\mathrm{kg}$.

   Na Zemi máme tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, tedy upravíme první vztah pro výpočet tíhové síly

   $$F = mg\,.$$

   Víme, že tíha a tíhová síla mají stejnou velikost, liší se pouze působištěm. Po dosazení získáme tíhu pytle $F \doteq 491\,\mathrm{N}$.

[7] https://cs.wikipedia.org/wiki/Měsíc

2. Je nám známo, že tanker plove, tedy „vytlačí, kolik váží". Potřebujeme proto vypočítat objem vody, který má stejnou hmotnost jako tanker. Voda má hustotu $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, hmotnost tankeru známe ze zadání. Dosadíme do vztahu pro objem a hustotu
$$V = \frac{m}{\rho}$$
a získáme minimální nutný objem lodi $V = 45\,000\,\mathrm{m^3}$.

3. Výfučkova loď s pokladem v lodi plove, tedy „vytlačí, kolik váží". Po přivázání pokladu zespodu stále plove, tedy stále „vytlačí, kolik váží". V obou případech loď vytlačí stejně vody, hladina v umyvadle tedy zůstane stejná.

4. Aby kvádr ploval, musí vytlačit stejné množství vody, jako sám váží. Hmotnost kvádru získáme ze vztahu $m = \rho_\mathrm{k} V_\mathrm{k}$, kde objem kvádru V_k snadno spočteme ze zadaných rozměrů. Objem vody, který musí kvádr vytlačit, tedy je
$$V = \frac{m}{\rho_\mathrm{v}} = \frac{\rho_\mathrm{k} V_\mathrm{k}}{\rho_\mathrm{v}}\,,$$
kde ρ_v je hustota vody. Pokud tento objem vydělíme plochou podstavy kvádru, získáme jeho tzv. hloubku ponoru, tedy do jaké výšky musí být pod vodou, aby ploval.
$$h = \frac{V}{S} = \frac{\rho_\mathrm{k} V_\mathrm{k}}{\rho_\mathrm{v} S} = 7{,}8\,\mathrm{cm}\,.$$
Poznámka: Celý tento postup lze zkrátit, víme-li, že z poměru hustot kapaliny a tělesa lze vypočítat, kolik procent tělesa musí být pod vodou. Jelikož tento postup ale není zmíněn ve Výfučtení, použili jsme „o něco delší" metodu.

Vypočteme-li z plochy podstavy akvária a objemu vody v něm výšku hladiny, dojdeme k výsledku 5,4 cm. Mnohé by tedy mohlo napadnout, že kvádr plovat nemůže. Problém ale je, že nejsme v moři, ale v akváriu. Hladina se tedy může zvedat a objem kapaliny tělesem vytlačené je roven objemu ponořené části tělesa, tedy může být i větší než skutečný objem kapaliny v akváriu.

Kolem podstavy kvádru zbývá $S_\mathrm{o} = 12\,\mathrm{cm}\cdot 12\,\mathrm{cm} - 10\,\mathrm{cm}\cdot 10\,\mathrm{cm} = 44\,\mathrm{cm^2}$ místa. Nalijeme-li do takto kvádrem „ukrojeného" prostoru vodu z akvária, vystoupá do výšky
$$h_\mathrm{o} = \frac{0{,}78\,\mathrm{l}}{44\,\mathrm{cm^2}} \doteq 17{,}7\,\mathrm{cm}\,,$$
což je rozhodně víc než $h = 7{,}8\,\mathrm{cm}$, které kvádru stačí na plování. Co se stane s vodou, která by vystoupala nad čáru ponoru? Jednoduše zůstane pod kvádrem a ten na ní plove.

Poznamenejme, že jsme ani nemuseli počítat hloubku ponoru h, protože h_o je větší než výška korku – vidíme, že korek má menší hustotu než voda. Pokud je tedy v akváriu dost vody, bude korek plovat. Následně nám stačí ověřit, jestli nebude korek ležet na podložce (na což bychom ponor h obecně potřebovali). Výpočtem h_o zjistíme, že je větší než výška korku, a tedy již ponor h vůbec nemusíme počítat – automaticky víme, že by v akváriu ploval stejně velký korek s libovolnou hustotou menší než hustota vody.

Soňa Husáková
sona.husakova@vyfuk.org

Pořadí řešitelů po III. sérii

Kompletní výsledky najdete na `https://vyfuk.org`.

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	43	129
1.	*Jan František Lukáš*	ZŠ Dr. M. Tyrše Hrdějovice	5	5	6	6	6	7	6	**41**	**107**
2.	*Richard Menšík*	G, Boskovice	5	3	3	6	4	7	6	**34**	**99**
3.	*Martina Mrázová*	ZŠ Palachova, Brandýs nad Labem	5	–	3	3	–	3	5	**19**	**77**
4.	*Martin Jirout*	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	5	4	4	6	–	7	2	**28**	**72**
5.	*Filip Petrásek*	ZŠ Nepomucká, Praha 5	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**70**
6.	*Jason Sýkora*	G K. Čapka, Dobříš	5	3	4	2	–	7	6	**27**	**69**
7.	*Petr Kysela*	G, Český Krumlov	4	3	4	2	–	6	5	**24**	**67**
8.	*Melinka Čejpová*	Arcibiskupské G, Praha	5	–	3	6	–	–	–	**14**	**61**
9.	*Emilie Kimmerová*	ZŠ a MŠ Kotlářská, Brno	5	0	6	6	–	3	–	**20**	**54**
10.–11.	*Laura Kvíčalová*	ZŠ a MŠ Petra Strozziho Praha 8	5	5	4	6	–	–	4	**24**	**53**
10.–11.	*Marek Roučka*	ZŠ Dobřany	3	–	4	6	–	–	4	**17**	**53**
12.	*Filip Svatoš*	Jungmannova ZŠ Beroun 2	3	5	3	6	–	–	–	**17**	**52**
13.	*Ondřej Mendlík*	ZŠ a MŠ Nerudova, Č. Budějovice	5	–	3	–	–	–	2	**10**	**51**
14.	*František Urban*	G, Benešov	5	4	3	–	–	–	3	**15**	**48**
15.	*Anna Ličková*	G, Litoměřická, Praha	5	5	–	6	–	4	–	**20**	**45**
16.–17.	*Kristýna Kuldová*	G Tišnov	5	5	3	1	–	–	–	**14**	**44**
16.–17.	*Filip Mayer*	ZŠ Svážná, Most	4	–	2	2	–	–	–	**8**	**44**
18.–19.	*Monika Pachlopníková*	ZŠ Brno, Sirotkova 36	5	–	3	6	–	–	–	**14**	**42**
18.–19.	*Marek Tóth*	G, Ústí nad Orlicí	–	5	4	–	–	–	–	**9**	**42**
20.–21.	*Tobiáš Vágner*	G J. Vrchlického, Klatovy	2	4	–	–	–	–	–	**6**	**39**
20.–21.	*Tobias Záveský*	ZŠ Hornická, Tachov	5	5	3	6	–	–	–	**19**	**39**
22.	*Kristýna Rybková*	ZŠ Úvoz, Brno	4	4	3	6	–	–	5	**22**	**37**
23.	*Filip Macák*	ZŠ a MŠ Třebíz., Kralupy n. V.	3	–	3	1	–	–	–	**7**	**35**
24.–25.	*Vojtěch Kubišta*	ZŠ Jakuba Arbesa, Most	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**33**
24.–25.	*Karel Olšar*	G, Český Krumlov	4	–	–	6	–	–	2	**12**	**33**
26.	*Anna Neumannová*	22. základní škola Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**32**
27.–28.	*Aneta Mužíková*	ZŠ Hornická, Tachov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**30**
27.–28.	*Viktorie Zemanová*	ZŠ Kralovice	5	–	–	1	–	3	–	**9**	**30**
29.	*Ema Paseková*	Masarykovo G, Vsetín	–	5	–	6	–	4	–	**15**	**29**
30.	*Štěpán Smolík*	G Christiana Dopplera, Praha	–	2	–	–	–	–	–	**2**	**26**
31.	*Richard Kulda*	ZŠ a MŠ Dolní Loučky	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**25**
32.–33.	*Julie Carolina Mecnerová*	G, Cheb	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**24**
32.–33.	*Patrik Chlup*	ZŠ Boskovice	5	3	3	1	–	1	–	**13**	**24**
34.–35.	*Elen Kršková*	G, Mikulov	–	–	3	–	–	–	–	**3**	**22**
34.–35.	*Martin Rakušan*	ZŠ sv. Voršily Praha 1	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**22**
36.–37.	*Adam Abd El Dayem*	ZŠ a MŠ Třebíz., Kralupy n. V.	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**19**
36.–37.	*Antonín Žaloudek*	G J. Blahoslava, Ivančice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**19**
38.	*Johana Vacková*	22. základní škola Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**18**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**129**
1.	*Oleg Šatánek*	ZŠ J. A. Kom. Hradec Králové	5	5	6	6	5	7	7	**41**	**124**
2.	*Lukáš Kopecký*	G, Litomyšl	5	4	4	6	5	7	7	**38**	**117**
3.	*Vladimír Kotsch*	Gymnázium Sázavská Praha 2	5	5	6	6	4	7	4	**37**	**114**
4.	*Viktorie Snášelová*	Masarykovo G, Plzeň	5	3	3	6	5	4	7	**33**	**107**
5.	*Pavel Doskočil*	G, Žamberk	5	5	3	3	5	4	6	**31**	**99**
6.	*Václav Bláha*	ZŠ a MŠ Školní 93„ Švihov	5	4	3	6	4	7	5	**34**	**92**
7.	*Antonín Vácha*	ZŠ Chrudim 3	5	4	3	2	–	7	5	**26**	**90**
8.	*Blanka Nováková*	ZŠ a MŠ Křídlovická, Brno	5	5	3	6	3	3	5	**30**	**87**
9.	*Tobiáš Radkovský*	G prof. J. Patočky, Praha	5	5	6	6	–	–	4	**26**	**86**
10.	*Jaroslav Motlík*	G Opatov, Praha	5	4	6	6	6	–	–	**27**	**81**
11.	*Lada Vysloužilová*	ZŠ Verdunská, Teplice	5	4	4	6	–	–	7	**26**	**80**
12.	*Martin Houška*	G a SOŠ, Rokycany	5	5	3	3	–	7	6	**29**	**79**
13.	*Kateřina Bartková*	G, Brno-Bystrc	5	–	4	6	–	7	4	**26**	**76**
14.–15.	*Eva Brožovičová*	Podkrušnohorské G, Most	5	3	3	3	–	5	5	**24**	**75**
14.–15.	*Metoděj Šámal*	ZŠ ul. 5. května, Liberec 1	3	–	3	6	–	1	4	**17**	**75**
16.	*Natálie Hnětkovská*	G, Benešov	5	5	3	6	–	4	–	**23**	**73**
17.	*Anna Přívětivá*	G, Litoměřická, Praha	5	5	6	6	5	–	–	**27**	**70**
18.	*Thea Pauerová*	Mensa G, Praha 6	3	5	–	–	–	7	–	**15**	**69**
19.	*František Šustr*	Fak. ZŠ při PedF UK, Praha 5	5	5	–	6	–	7	7	**30**	**68**
20.	*Lukáš Laštovička*	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**66**
21.	*Fabien Bartůněk*	G a SOŠP, Čáslav	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**65**
22.	*Alžběta Průšová*	G a SOŠ, Rokycany	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**63**
23.–24.	*Pavla Holečková*	Jungmannova ZŠ Beroun 2	5	–	–	6	–	7	5	**23**	**62**
23.–24.	*Andrea Vaňková*	G, Sušice	4	–	–	1	–	4	2	**11**	**62**
25.	*Tomáš Kvapil*	PORG, Praha	5	–	–	6	–	7	–	**18**	**61**
26.	*Štěpán Vlasák*	G Jiřího z Poděbrad, Poděbrady	4	5	3	2	–	7	3	**24**	**59**
27.	*Henryk Berka*	G, Roudnice nad Labem	5	4	6	6	–	–	–	**21**	**58**
28.	*Valentýna Sochorová*	G, Olomouc-Hejčín	5	–	–	6	–	–	–	**11**	**57**
29.	*Bartoloměj Stoklásek*	ZŠ Troubelice	5	4	–	6	–	–	–	**15**	**55**
30.–31.	*David Hložek*	ZŠ Vybíralova, Praha 9 - Černý M	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**54**
30.–31.	*Dominik Stoklasek*	ZŠ Troubelice	5	5	–	6	–	–	–	**16**	**54**
32.	*Marie Ježková*	ZŠ T. G. Masaryka Rokycany	5	4	3	6	2	4	4	**28**	**53**
33.–38.	*Štěpán Hrabina*	Jungmannova ZŠ Beroun 2	5	1	–	–	–	3	4	**13**	**52**
33.–38.	*Jan Josef Veselý*	Purkyňovo G, Stážnice	5	5	4	6	–	–	–	**20**	**52**
33.–38.	*Jan Kadlec*	ZŠ a MŠ Školní 93„ Švihov	5	5	3	6	–	–	4	**23**	**52**
33.–38.	*Eva Kišová*	ZŠ U Vorliny, Vlašim	5	5	3	2	–	–	1	**16**	**52**
33.–38.	*Michal Klapetek*	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**52**
33.–38.	*Kristýna Musilová*	ZŠ T. G. Masaryka Mnichovice	4	5	–	6	–	–	4	**19**	**52**
39.	*Michal Bartoš*	ZŠ Veronské náměstí, Praha	5	5	–	–	–	–	–	**10**	**51**
40.	*Jan Hanousek*	ZŠ a MŠ Jičín	5	5	–	–	–	–	3	**13**	**50**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**114**
1.	*Adam Houdek*	ZŠ a MŠ , Březová	–	5	6	6	7	5	7	**36**	**112**
2.	*Erik Macek*	G Opatov, Praha	–	5	6	6	6	6	7	**36**	**107**
3.	*Matěj Dudek*	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	4	6	6	7	7	7	**37**	**105**
4.	*Matěj Křivánek*	G, Moravské Budějovice	–	3	6	6	6	7	5	**33**	**101**
5.	*Emma Polcarová*	Sportovní G, Plzeňská, Kladno	–	5	6	6	5	7	5	**34**	**99**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**114**
6.	*Dario Heinich*	G a ZUŠ, Šlapanice	–	5	3	6	7	7	7	**35**	**92**
7.	*Jan Horský*	G, Brno - Řečkovice	–	5	6	6	5	7	7	**36**	**89**
8.–9.	*Aneta Brzokoupilová*	Jungmannova ZŠ Beroun 2	–	4	4	6	5	7	5	**31**	**86**
8.–9.	*Roman Velko*	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	–	5	6	6	5	7	6	**35**	**86**
10.	*Květa Bouchalová*	G, Olomouc-Hejčín	–	5	5	6	4	5	5	**30**	**78**
11.	*Rozálie Michaela Furchová*	G, Židlochovice	–	4	3	6	4	3	3	**23**	**76**
12.–13.	*Eliška Knopfová*	ZŠ J. A. Kom. Hradec Králové	–	5	3	6	–	–	7	**21**	**75**
12.–13.	*Jakub Vávra*	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	5	6	–	–	–	6	**17**	**75**
14.	*Radim Zikmund*	ZŠ Tuchlovice	–	1	3	2	2	5	5	**18**	**74**
15.	*Mariana Hořínková*	Wichterlovo G, Ostrava	–	3	3	6	4	2	6	**24**	**73**
16.	*Martina Merglová*	Krkonošské G a SOŠ Vrchlabí	–	5	6	6	5	7	7	**36**	**71**
17.–18.	*Amálie Hlávková*	ZŠ, Znojmo, Mládeže 3	–	5	3	–	–	5	6	**19**	**70**
17.–18.	*Viktor Novák*	Nový PORG, Praha	–	3	3	6	2	5	4	**23**	**70**
19.–21.	*Julie Judásková*	G a SOŠZE, Vyškov	–	4	0	5	2	5	7	**23**	**69**
19.–21.	*Barbora Petrásková*	28. základní škola Plzeň	–	5	6	6	–	–	6	**23**	**69**
19.–21.	*Dominik Svatoš*	G J. Barranda, Beroun	–	5	4	6	–	7	6	**28**	**69**
22.–23.	*Michal Jirout*	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	–	4	3	5	–	7	5	**24**	**62**
22.–23.	*Marek Růžička*	G, Brno - Řečkovice	–	–	6	6	–	–	5	**17**	**62**
24.–26.	*Magdalena Čejpová*	Arcibiskupské G, Praha	–	–	3	4	–	–	2	**9**	**61**
24.–26.	*Ondřej Laštovička*	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	3	6	–	–	3	**12**	**61**
24.–26.	*Vojtěch Saic*	ZŠ a MŠ Dobratická, Praha 9	–	5	–	6	–	7	7	**25**	**61**
27.	*Angela Poláchová*	Biskupské G, Brno	–	5	6	3	–	–	5	**19**	**60**
28.–29.	*Jan Roháč*	ZŠ Tuchlovice	–	–	–	6	–	–	5	**11**	**59**
28.–29.	*Darek Zápeca*	G a JŠ, Břeclav	–	5	4	3	4	–	5	**21**	**59**
30.–33.	*Marek Bauckmann*	G K. Čapka, Dobříš	–	–	3	6	1	–	7	**17**	**58**
30.–33.	*Jakub Kolář*	G Opatov, Praha	–	4	4	6	2	0	3	**19**	**58**
30.–33.	*Kristián Mošna*	Základní škola Dědina	–	5	–	6	–	–	6	**17**	**58**
30.–33.	*Antonín Šreiber*	ZŠ Skálova, Turnov	–	5	0	2	5	–	6	**18**	**58**
34.–35.	*Andrea Kozumplíková*	Klvaňovo G Kyjov	–	4	3	6	4	2	5	**24**	**56**
34.–35.	*Vít Krejčí*	G Jana Nerudy, Praha	–	3	3	6	5	4	5	**26**	**56**
36.	*Klára Kasalová*	G, Dačice	–	–	3	6	–	–	4	**13**	**54**
37.	*Viktor Janda*	ZŠ Roudnice n.L.	–	–	3	6	–	2	3	**14**	**53**
38.–39.	*Sofie Hana Klímová*	G, Brno - Řečkovice	–	5	6	6	–	–	–	**17**	**52**
38.–39.	*Miroslav Štajner*	ZŠ Komenského, Hořovice	–	5	6	6	3	1	7	**28**	**52**
40.	*Michal Blahoš*	G, Benešov	–	5	6	6	7	–	7	**31**	**51**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**114**
1.	*Anna Matiášková*	G, Turnov	–	2	6	6	7	7	6	**34**	**109**
2.	*Sámo Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	–	5	6	6	7	7	6	**37**	**108**
3.	*Daniel Přívětivý*	G Arcus, Praha	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**107**
4.–5.	*Jana Feldbabelová*	ZŠ Jemnice	–	5	6	6	5	7	5	**34**	**106**
4.–5.	*Akim Sklenka*	G, Žamberk	–	5	4	6	6	7	7	**35**	**106**
6.–8.	*Alex Faivre*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	5	6	6	5	7	6	**35**	**103**
6.–8.	*Charlotte Hosszú*	G B. Němcové, HK	–	4	6	6	7	7	7	**37**	**103**
6.–8.	*Max Menčík*	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	–	4	3	6	4	7	7	**31**	**103**
9.	*Petr Mareš*	ZŠ a MŠ Třebíz., Kralupy n. V.	–	5	6	6	4	5	7	**33**	**101**
10.	*Jonáš Fiala*	G, Čelákovice	–	5	6	6	3	7	7	**34**	**100**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**114**
11.	*Petr Barták*	Slovanské G, Olomouc	–	4	3	6	5	6	7	**31**	**99**
12.	*Martin Podpěra*	G Ústavní, Praha	–	4	3	6	5	6	7	**31**	**97**
13.	*Tamara Dědková*	G, Roudnice nad Labem	–	5	6	6	4	6	4	**31**	**96**
14.	*Světlana Achedžak*	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	4	6	5	3	6	**29**	**95**
15.	*Martin Černý*	G Teplice	–	3	3	6	2	7	5	**26**	**92**
16.–17.	*Alice Dědicová*	ZŠ Amálská, Kladno	–	5	6	6	7	7	5	**36**	**91**
16.–17.	*Marie Hrubá*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	4	3	6	3	4	5	**25**	**91**
18.	*Martin Myška*	G B. Němcové, HK	–	4	6	1	4	5	5	**25**	**89**
19.	*Matěj Sochor*	G prof. J. Patočky, Praha	–	5	3	6	5	6	5	**30**	**87**
20.	*Josef Eliáš Formánek*	G, Křenová, Brno	–	5	6	5	3	3	4	**26**	**84**
21.	*Jan Chalupa*	ZŠ E. Rošického, Jihlava	–	5	–	6	–	4	4	**19**	**82**
22.–23.	*Hana Dziková*	Klvaňovo G Kyjov	–	4	3	6	5	–	6	**24**	**80**
22.–23.	*Barbora Samková*	ZŠ Prodloužená, Pardubice	–	4	3	6	–	5	2	**20**	**80**
24.	*Martin Vávra*	ZŠ O. Březiny Jaroměřice n/R.	–	5	6	6	2	7	6	**32**	**79**
25.	*Julie Krčmařová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	3	2	3	7	5	**25**	**78**
26.	*Marie Prokešová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	3	6	–	7	7	**28**	**75**
27.	*Aneta Kaniová*	G Orlová	–	3	3	1	2	7	4	**20**	**74**
28.	*Hoang Ngan Nguyen*	Klvaňovo G Kyjov	–	4	3	6	4	2	6	**25**	**72**
29.–30.	*Lucie Kolářová*	G, Dačice	–	4	3	2	2	–	3	**14**	**69**
29.–30.	*Lucie Víšková*	OPEN GATE Říčany	–	5	3	6	–	–	–	**14**	**69**
31.	*Běla Poláčková*	ZŠ Mírová, Ústí nad Labem	–	5	–	1	–	–	6	**12**	**66**
32.	*Karel Hlaváček*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	3	6	–	2	3	**14**	**62**
33.	*Dominik Kudr*	ZŠ a MŠ Studenec	–	4	3	1	5	–	5	**18**	**61**
34.	*Maxmilián Ožana*	G F. Hajdy, Ostrava	–	3	6	6	5	7	6	**33**	**60**
35.	*Martin Rippl*	ZŠ a MŠ Osečná	–	4	3	1	–	7	6	**21**	**59**
36.–37.	*Přemek Man*	ZŠ a MŠ Červený vrch, Praha	–	2	0	1	–	–	5	**8**	**58**
36.–37.	*Lucie Pinkerová*	ZŠ a MŠ Školní, Švihov	–	4	3	6	–	–	7	**20**	**58**
38.–39.	*Michal Bělohlávek*	ZŠ JAK, Karlovy vary	–	3	3	6	2	4	4	**22**	**57**
38.–39.	*Filip Rezek*	G J. Žáka, Jaroměř	–	5	3	6	3	–	–	**17**	**57**
40.	*Ondřej Pátek*	G Ústavní, Praha	–	0	3	6	0	0	2	**11**	**55**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: https://vyfuk.org
e-mail: vyfuk@vyfuk.org

/ksvyfuk *@ksvyfuk*

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.