

Úloha VIII.2 ... Newton a jablko

10 bodů; průměr 4,43; řešilo 123 studentů

Snad každý zná příběh o objevu gravitace. Isaac Newton údajně objevil svou slavnou teorii inspirován tím, že mu na hlavu spadlo ze stromu jablko. V této úloze se zamyslíme, jak pravděpodobné je, že k tomu skutečně došlo. Předpokládejme, že by Newton seděl pod stromem každý den 3 hodiny. Kolik let by musel průměrně pod stromem sedávat, aby mu na hlavu spadlo jedno jablko?

Všechny potřebné údaje si buď dohledejte nebo odhadněte.



Zkusme si nejprve napsat rovnici popisující, kolik jablek průměrně Newtonovi spadne na hlavu za T let. Označme průměrný počet jablek, která spadnou ze stromu za 1 rok, jako f_j . Pokud ho vynásobíme počtem let T , která Newton prosedí pod stromem, tak získáme celkový počet spadnuvších jablek. Ten nakonec vynásobíme pravděpodobností p , že jedno jablko spadne na jeho hlavu. Označíme-li N průměrný počet jablek, která mu spadnou na hlavu, získáváme rovnici

$$N = f_j T p.$$

Nás zajímá doba T_1 , za níž spadne Newtonovi na hlavu průměrně 1 jablko. Dosadíme tedy $N = 1$ a vyjádříme z rovnice počet let, čímž dostaneme

$$T_1 = \frac{1}{f_j p}.$$

Nejobtížnější částí této úlohy je určení pravděpodobnosti p , že dané jablko spadne na Newtonovu hlavu. Je velmi užitečné si uvědomit, že tato pravděpodobnost se ve skutečnosti skládá ze dvou pravděpodobností. První z těchto dvou je p_t , která udává pravděpodobnost, že Newton je v okamžiku, kdy jablko padá, vůbec pod stromem. Druhou pak je pravděpodobnost p_x , která udává pravděpodobnost, že se jablko do Newtonovy hlavy skutečně trefí, tedy že jablko padá skrz prostor, kde se nachází jeho hlava. Pravděpodobnost p udává pravděpodobnost jevu, který odpovídá současnému splnění obou těchto jevů, proto ji získáme jako součin obou pravděpodobností, tedy

$$p = p_t p_x.$$

Začneme tím, že spočítáme pravděpodobnost p_t . K tomu využijeme jediného údaje, který je přímo zadaný, že Newton sedí pod stromem každý den 3 hodiny. Velmi snadno spočítáme, že to odpovídá $1/8$ dne. V zadání je též uveden předpoklad, že pod stromem sedává každý den. Z toho plyne, že pod jabloní sedí $1/8$ času. Je tedy nejpřirozenější předpokládat, že v době pádu libovolného jablka je pravděpodobnost, že Newton sedí pod stromem též $1/8$ ¹. Tím tedy získáváme $p_t = 1/8$.

Pro určení pravděpodobnosti p ještě potřebujeme odhadnout pravděpodobnost p_x . Zajímá nás tedy, jaká je pravděpodobnost, že jablko padající ze stromu by se alespoň dotklo jeho hlavy. Situaci si zde trochu zjednodušíme tím, že budeme předpokládat, že jablka padají na všechna místa pod stromem stejně často. Toto nespíš nebude zcela správný předpoklad, protože koruna stromu není placatá, ale má spíše tvar koule. Navíc nevíme, na jakých částech stromu jablka nejčastěji rostou. Stejně tak však nevíme, na jakém místě pod stromem Newton sedával, lze tedy na toto nahlížet jako na jistý průměr pravděpodobnosti. Tento předpoklad nám již nyní umožňuje vypočítat pravděpodobnost p_x . Plyne z něj totiž, že mezi pravděpodobnostmi, že jablko

¹Tento předpoklad není tak zřejmý, jak by se mohlo zdát. Například pokud by Newton spíše volil pro své posezení dobu, kdy jablka padají nadprůměrně často, tak by tento předpoklad nebyl správný. Vzhledem k zadaným údajům je však tento předpoklad logičtější než kterýkoliv jiný.

spadne do nějaké plochy, a velikostí této plochy je přímá úměrnost. Zároveň je také zřejmé, že pravděpodobnost, že jablko spadne někam pod strom, je 1. (Jinak řečeno je jisté, že když jablko padá, tak spadne někam pod strom.) Z tohoto získáváme pro pravděpodobnost p_x rovnici

$$\frac{p_x}{1} = p_x = \frac{S_H}{S_C},$$

kde S_H je plocha, do níž musí jablko spadnout, aby trefilo Newtona do hlavy a S_C je celková plocha pod korunou stromu.

Při počítání plochy S_H bychom si měli uvědomit, že to není jen plocha Newtonovy hlavy, ale plocha, do které bude-li náležet střed jablka, tak hlavu trefí. Tato plocha je trochu větší, neboť i jablko, jehož střed bude těsně vedle hlavy, do hlavy narazí. Pokud budeme uvažovat, že při pohledu shora má hlava i jablko kruhový tvar, a označíme poloměr jablka jako r_J a poloměr hlavy r_H , pak i plocha S_H bude kruhová a její poloměr bude $r_J + r_H$. Pokud budeme předpokládat, že koruna stromu má při pohledu shora též přibližně kruhový tvar s poloměrem R_S , tak poté platí, že celková plocha, kam může jablko dopadnout, bude též kruhová s poloměrem R_S . Pro pravděpodobnost p_x poté tedy dostáváme

$$p_x = \frac{S_H}{S_C} = \frac{\pi(r_J + r_H)^2}{\pi R_S^2} = \frac{(r_J + r_H)^2}{R_S^2}.$$

Tento odvozený vzorec nyní nejprve dosadíme do vztahu pro pravděpodobnost p a ten následně poté do rovnice pro počet let T_1 , který musí Newton strávit pod stromem, aby mu na hlavu průměrně spadlo 1 jablko. Tím dostaneme výsledný vztah

$$T_1 = \frac{8R_S^2}{(r_J + r_H)^2 f_j}.$$

Nyní již jen potřebujeme odhadnout veličiny, které ve výsledném vztahu vystupují. Dle internetové verze encyklopedie Britannica² mají jabloně v přírodě průměr koruny asi 9 m, a poloměr je tedy $R_S = 4,5$ m. Průměr jablek samotných je běžně asi 5 – 10 cm, pročež v našich výpočtech budeme pro jejich poloměr používat hodnotu $r_J = 3,75$ cm.

Předpokládáme-li, že jablka nikdo neočesává, tak počet jablek, která ze stromu spadnou, je přibližně stejný jako počet jablek, která na něm vyrostou. Dle zdrojů dostupných online³ jsme nakonec dospěli k tomu, že jabloně, která není určena ke komerčnímu využití (tedy taková, kterou bychom v Newtonově čase nejspíš očekávali), za dobrý rok vynese asi 80 – 150 jablek. Pro náš odhad tedy použijeme hodnotu $f_j = 115$ jablek za rok.

Nakonec zbývá ještě odhadnout poloměr hlavy. K tomu využijeme Wikipedii⁴, která udává, že šířka hlavy je u mužů v průměru asi 15 cm a její délka přibližně 22 cm. Pokud tedy budeme uvažovat, že by měla hlava kruhový tvar, tak je nej přirozenější uvažovat její průměr jako 18,5 cm a poloměr poté bude $r_H = 9,25$ cm. Nyní již jen dosadíme a získáme výsledek

$$T_1 = 83,4 \text{ let}.$$

Poznamenejme ještě, že náš výsledek rozhodně neznamená, že na Newtonovu hlavu spadne jablko přesně po 83,4 letech, ani že za 83,4 let mu na hlavu spadne celkem právě jedno jablko.

²<https://www.britannica.com/plant/apple-fruit-and-tree>

³<https://wikifarmer.com/qas-apple-tree/>

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Human_head

Říká, že za 83,4 let mu na hlavu spadne *průměrně* jedno jablko. Jak tomu rozumět? Představme si, že by Newton pod stromem sedával tisíce let. Pokud bychom sečetli všechna jablka, která mu spadla na hlavu, a vydělili je celkovým počtem let, tak bychom dostali přibližně $1/83,4$ let. Další možnost, jak na výsledek pohlížet, je v řeči pravděpodobnosti. Konkrétně v tomto případě se dá spočítat, že po $T_1 = 83,4$ letech je pravděpodobnost, že na Newtonovu hlavu spadlo alespoň jedno jablko, rovna přibližně 63 %. Mohlo by se tedy stát, že mu za 80 let spadne na hlavu 10 jablek, nebo že mu po 200 letech na hlavu nespadne jediné jablko. Náš výsledek nám ale říká, že jsou tyto možnosti nepravděpodobné.

Vidíme tedy, že dle našich odhadů by Newton musel pod stromem sedávat opravdu hodně dlouho. Výsledek samozřejmě není zcela přesný, jelikož odhady, které jsme použili, se mohou i značně lišit od skutečných hodnot pro nějakou konkrétní jablkoň. K nejvýraznějším odchylkám bude nejspíš docházet u rozměrů stromu a počtu jablek, které na něm za rok vyrostou. Obě hodnoty se mohou u různých jabloní lišit i několikanásobně. Zjednodušení, že jablka padají na všechna místa pod stromem se stejnou pravděpodobností, které jsme využili při výpočtu pravděpodobnosti p_x , bude v porovnání s nejistotami v hodnotách odhadovaných veličin zanedbatelné. I přes to, že je nejistota odhadu poměrně velká, tak je pravděpodobné, že i pro jiné hodnoty bude čas T_1 vycházet jako alespoň několik desítek let, z čehož můžeme soudit, že příběh o Newtonovi a jablku je dost nepravděpodobný.

Aleš Opl

ales@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.