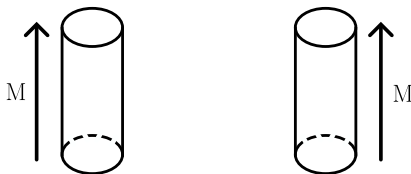


Úloha VI.V ... Matoucí magnety

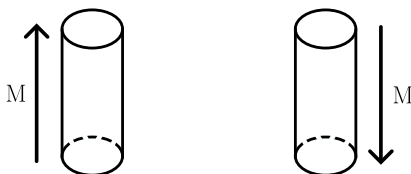
7 bodů; průměr 4,37; řešilo 19 studentů

Hynek s Alešem si hráli s neodymovými magnety a uchvátilo je jejich podivuhodné až magické chování. Pomozte jim zodpovědět několik otázek, s nimiž si při svém okouzlení nevěděli rady.

1. Rozhodněte, zda se dvojice magnetů na obrázcích 1 a 2 budou přitahovat, nebo odpuzovat. Stručně své rozhodnutí zdůvodněte.

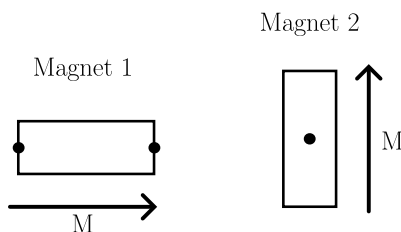


Obrázek 1: Obrázek k první podúloze.



Obrázek 2: Obrázek k první a třetí podúloze.

2. Představme si dva magnety, jež jsou na počátku umístěny jako na obrázku 3, přičemž magnet 1 je upevněn na obou koncích, magnet 2 je upevněn uprostřed a může se volně otáčet. Slovně popište, jak se bude magnet 2 pohybovat.



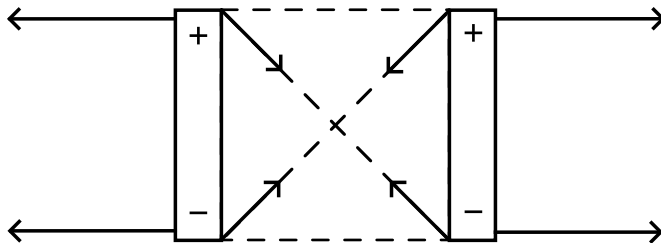
Obrázek 3: Obrázek k druhé podúloze.

3. Vypočítejte, jaká síla bude působit mezi tyčovými magnety na obrázku 2. Uvažujte, že oba magnety jsou stejné. Jejich poloměr je $r = 0,5 \text{ cm}$ a délka $l = 2 \text{ cm}$, jejich magnetizace je $M = 1,5 \text{ T}/\mu_0$ a o jejich vzdálenosti $d = 10 \text{ cm}$ předpokládejte, že je mnohem větší než rozměry magnetů.

1. Na prvním obrázku vidíme dva magnety, které mají oba stejně směřující vektor magnetizace. Tuto skutečnost můžeme vyjádřit ekvivalentním tvrzením, že magnety mají souhlasně orientované póly. Nepochybně ze svých zkušeností dokážete rovnou určit, že se magnety budou odpuzovat, ale my se nyní pokusíme nastínit trochu důkladnější úvahu, se kterou bychom se měli dopracovat ke správnému výsledku. Zkusme aplikovat náš trik, který přirovnává magnet ke dvěma bodovým magnetickým nábojům. Pro ty již umíme spočítat magnetickou sílu, kterou na sebe působí:

$$F = \mu \frac{\varphi_1 \varphi_2}{4\pi r^2},$$

kde φ_1 a φ_2 jsou magnetické náboje. Pokud tedy jednotlivé póly magnetu můžeme pomyslně nahradit těmito náboji, je pak možné chování magnetů dostatečně kvalitně popsat. Místo severních pólů si můžeme představit kladné magnetické náboje a místo jižních pólů naopak záporné. V celé situaci máme nyní čtyři náboje, které budou v důsledku principu superpozice mezi sebou působit celkem čtyřmi silami.



Dvě z nich jsou jmenovitě síla mezi oběma kladnými náboji a síla mezi zápornými. Obě mají odpuzivý charakter kvůli souhlasnému náboji. Jsou tu však ještě dvě další síly, a to mezi kladnými a zápornými náboji. Tyto síly naopak magnety přitahují, ale vzhledem k tomu, že kladný náboj je od záporného o trochu dál než od kladného (nebo záporný od záporného), bude příspěvek od přitažlivé síly o něco menší než od odpuzivé. Jak nám říká vztah uvedený výše, síla skutečně slábne se vzdáleností. Navíc přitažlivá síla na rozdíl od odpuzivé působí trochu šikmo vzhledem k magnetu, takže přitahování způsobuje pouze její horizontální složka, která je samozřejmě ještě menší než samotná velikost celé síly působící mezi kladným a záporným nábojem. Tímto jsme úvahou dokázali, že se magnety v prvním případě budou odpuzovat.

Jak to bude vypadat ve druhém případě? Zde máme magnety s opačně orientovanými vektory magnetizace. Celá situace je tak prohozená oproti té první. Nyní jsou blíž k sobě severní pól jednoho magnetu a jižní pól druhého (a naopak) než severní od severního a jižní od jižního. Ve výsledku je pak odpuzivá síla, která nyní působí na větší vzdálenost, menší než přitažlivá, takže se magnety budou přitahovat.

2. Výstižně jsme teď popsali sílu, kterou na sebe magnety působí. Jak by se ale popisoval pohyb magnetů? Řešme zadanou úlohu s jedním upevněným magnetem a druhým, který se může volně otáčet. Opět můžeme využít představu s magnetickými náboji. Na obrázku k zadání vidíme, že severní pól upevněného magnetu je blíž k volnému magnetu. Můžeme proto soudit, že síly, kterými bude působit jižní pól pevně fixovaného magnetu na volný

magnet, jsou menší než v případě severního pólu, a tak převládnu síly od severního. Jižní pól volného magnetu bude přitahován k severnímu pólu pevného, a naopak severní pól volného jím bude odpuzován. Ve výsledku tak vznikne moment síly a magnet se začne otáčet po směru hodinových ručiček (podle obrázku). V momentě, kdy oba magnety srovnají své magnetizace (jižní pól volného magnetu bude nejbliž ke druhému), výsledná magnetická síla už nebude mít točivý účinek, ale přesto se magnet setrvačností bude i dále otáčet. Ve chvíli, kdy bude volný magnet již otočen více než o devadesát stupňů, na něj začne působit moment síly na opačnou stranu, což povede ke zpomalování otáčení, jeho zastavení a nakonec obrácení směru otáčení. Magnet poté opět překoná rovnovážnou polohu. V ní na něj nepůsobí moment síly, znovu se změní směr působení momentu síly, což zase povede nejdříve ke zpomalování rotace a nakonec až k obrácení jejího směru. Tento proces se periodicky opakuje, a my tak o magnetu prohlašujeme, že kmitá.

3. V poslední části se podíváme už i na nějaké konkrétní výpočty. Snažíme se určit sílu, kterou na sebe působí dva stejné magnety s opačně orientovanými vektory magnetizace (podle obr. 2). Tento případ jsme již rozebrali výše, takže víme, že je třeba spočítat celkem čtyři síly působící mezi náboji. Úplně nejdříve však potřebujeme nalézt ony magnetické náboje (jejichž velikost je k našemu štěstí u obou stejná díky identičnosti obou magnetů). Ve Výfučení si můžeme povšimnout, že u tyčového magnetu se dá magnetický náboj spočítat jako

$$\varphi = M\pi r^2.$$

Když známe náboj, můžeme se zaměřit na jednotlivé síly. Nejprve spočítejme ty přitažlivé, které působí na vzdálenost d . Mají stejnou velikost i směr a jsou právě dvě. Z toho můžeme usoudit, že celková přitažlivá síla bude rovna dvojnásobku síly, kterou na sebe působí kladný náboj jednoho magnetu a záporný druhého. Za využití výše uvedeného vzorce pro sílu mezi magnetickými náboji to znamená

$$F_p = \mu \frac{\varphi^2}{2\pi d^2}.$$

Tímto byla spočtena přitažlivá část síly mezi dvěma magnety (F_p). To ale není všechno, neboť z jisté části se magnety i odpuzují. Tato síla ale působí mezi horním koncem jednoho magnetu a dolním koncem druhého. Na obrázku můžete vidět, že vzdálenost mezi těmito konci je dle Pythagorovy věty $\sqrt{d^2 + l^2}$. Opět máme odpudivé síly dvě, mají stejnou velikost, ale už jiný směr! Tyto dílčí síly směřují vůči sobě šikmo, a musíme je proto složit jinak než jen pouhým součtem velikostí. Je docela zajímavé, že tím, že působí pod stejným sklonem vůči magnetu se stejnou velikostí, jen proti sobě, se vyruší vertikální složky (vůči orientaci obrázku) těchto sil, a jedinou roli tak budou hrát složky horizontální. Nyní tedy musíme rozložit sílu na horizontální a vertikální složku. Víme, že máme magnetickou sílu o velikosti

$$\frac{\mu}{4\pi} \frac{\varphi^2}{d^2 + l^2}.$$

Pokud má tato síla sklon α vůči vodorovné ose, její vodorovná složka bude odpovídat velikosti síly vynásobené hodnotou kosinu úhlu α .

$$\frac{\mu}{4\pi} \frac{\varphi^2}{d^2 + l^2} \cos \alpha$$

Takto se standardně rozkládají vektory. Co geometricky vyjadřuje $\cos \alpha$? Z definice této funkce plyne, že $\cos \alpha$ odpovídá poměru vzdálenosti severního pólu jednoho magnetu od jižního pólu druhého a vzdálenosti severních pólů magnetů. Matematicky jde o poměr

$$\cos \alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}}.$$

Dosažením vyjádření kosinu úhlu α do předchozího výrazu bychom dostali horizontální část odpudivé síly. Celková síla (F_o), která působí odpudivým účinkem, je pouze jejím dvojnásobkem (sčítáme příspěvky obou dvojic pólů).

$$F_o = 2 \frac{\mu}{4\pi} \frac{\varphi^2}{d^2 + l^2} \frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{d\varphi^2}{(d^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Zbývá už jen poslední krok, spočítat celkovou sílu F mezi magnety. Ta bude jednoduše rozdíl celkové přitažlivé a celkové odpudivé síly.

$$F = F_p - F_o = \mu \frac{\varphi^2}{2\pi d^2} - \frac{\mu}{2\pi} \frac{d\varphi^2}{(d^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu\varphi^2}{2\pi} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{d}{(d^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

V poslední řadě můžeme do vzorce dosadit již dříve spočtený magnetický náboj φ .

$$F = \frac{\pi}{2} \mu_0 M^2 r^4 \left(\frac{1}{d^2} - \frac{d}{(d^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Poznamenáváme, že za permeabilitu prostředí jsme dosadili hodnotu pro vakuum (μ_0), která je téměř stejná i pro vzduch. V zadání sice není určeno, v jakém prostředí se magnety nachází, ale lze předpokládat, že ve standardní atmosféře. A tímto je veškeré upravování rovnic hotové, zbývá pouze dosadit hodnoty ze zadání.

$$r = 0,5 \text{ cm} = 0,005 \text{ m}$$

$$l = 2 \text{ cm} = 0,02 \text{ m}$$

$$d = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

$$M = 1,5 \text{ T}/\mu_0$$

Jednotka magnetizace se může zdát trochu zvláštní, je totiž složená z jednotky *tesla* (T), což je mimo jiné základní jednotka magnetické indukce, a z permeability vakua. Vzhledem k tomu, že se permeabilita vyskytuje ve vzorci ještě jinde, je vhodné dosazovat magnetizaci v tomto tvaru, abychom mohli permeabilitu případně vykrátit.

$$F = \frac{\pi}{2} \mu_0 \cdot \frac{1,5^2 \text{ T}^2}{\mu_0^2} \cdot 0,005^4 \text{ m}^4 \cdot \left(\frac{1}{0,1^2 \text{ m}^2} - \frac{0,1 \text{ m}}{(0,1^2 \text{ m}^2 + 0,02^2 \text{ m}^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$F \doteq \frac{1,262 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{T}^2}{\mu_0}$$

Bohužel i tak potřebujeme znát její hodnotu.

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{T}^2 \cdot \text{N}^{-1}$$

$$F \doteq \frac{1,262 \cdot 10^{-8} \text{ N}}{4\pi \cdot 10^{-7}} \doteq 0,01 \text{ N}$$

Ve finále jsme se dopracovali k výsledku, že magnety na sebe budou působit celkovou silou přibližně 0,01 N.

Michal Stroff
stroffis@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.