

Úloha VI.3 ... Plníme

6 bodů; průměr 5,12; řešilo 32 studentů

Lukáš dostal za úkol zalít záhon, k čemuž používá konev o objemu $V = 10\text{ l}$. Obklopen přírodou se u plnění zamyslel, a když se probрал, bylo v konvi již 9 l vody. Začal tedy zatahovat kohoutek tak, že změna průtoku za čas byla $q = 30\text{ l}\cdot\text{min}^{-2}$. Rozhodněte, zda Lukášovi voda přetékla, nebo ne. Maximální průtok vody z kohoutku byl $Q = 10\text{ l}\cdot\text{min}^{-1}$. Jak dlouho má trvat celé plnění, aby po zastavení proudu vody byla konev plná a žádná voda nepřišla nazmar? Na počátku je nulový průtok a Lukáš otevírá kohoutek stejně rychle, jako ho zatahuje.



V této úloze využijeme analogie s rovnoměrně zrychleným a zpomaleným pohybem. Analogie je takový druh podobnosti, který v našem případě říká, že pro veličiny jako je zvětšování a zpomalování průtoku platí obdobné fyzikální vztahy jako pro rovnoměrně zrychlený pohyb. Při pohybu studujeme uraženou dráhu a u konve máme množství vody. Rychlosti chápeme uraženou dráhu za určitý čas a průtok odpovídá množství vody, která nateče do konve za určitý čas. Víme tedy, že rychlost i průtok jsou definovány „stejně“, proto poznatky získané studiem pohybu můžeme využít i při plnění konve vodou.

Začneme tím, že zjistíme, jestli Lukášovi voda z konve přetékla. Konev má objem $V = 10\text{ l}$ a je v ní již 9 l vody, proto se do ní vešel už jen jeden litr $(10 - 9)\text{ l} = 1\text{ l}$. Průtok před začátkem zavírání kohoutku byl $Q = 10\text{ l}\cdot\text{min}^{-1}$, kde je tato veličina analogická k rychlosti. Lukáš začal kohoutek zavírat se změnou průtoku za čas $q = 30\text{ l}\cdot\text{min}^{-2}$. Zde využijeme analogii zrychlení. My chceme spočítat objem vody, který během zavírání kohoutku protekl, ten je v našem případě veličina analogická dráze rovnoměrně zpomaleného pohybu. Pro něj platí vztah:

$$V' = \frac{1}{2}qt^2.$$

V tomto vztahu známe hodnoty všech veličin kromě času t , po který bude Lukáš kohoutek zavírat. Ten můžeme ale také spočítat, neboť se potřebujeme z průtoku $Q = 10\text{ l}\cdot\text{min}^{-1}$ dostat na průtok $Q_0 = 0\text{ l}\cdot\text{min}^{-1}$. Tento průtok se bude snižovat se změnou průtoku za čas o velikosti $q = 30\text{ l}\cdot\text{min}^{-2}$. Pro čas proto bude platit:

$$t = \frac{Q}{q}.$$

Dosazením času do vztahu pro výpočet objemu dostaneme:

$$V' = \frac{1}{2}q \left(\frac{Q}{q} \right)^2 = \frac{Q^2}{2q}.$$

Teď už jen dosadíme hodnoty a získáme:

$$V' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(10\text{ l}\cdot\text{min}^{-1})^2}{30\text{ l}\cdot\text{min}^{-2}},$$

$$V' = \frac{5}{3}\text{ l}.$$

Lukáš má v konvi ale už jen 1 l volného prostoru, a protože $5/3\text{ l}$ je větší než 1 l, Lukášovi konev přetече.

Teď ještě máme za úkol vypočítat, jak dlouho bude trvat naplnění celé konve tak, abychom skončili se zavřeným kohoutkem a žádná voda nepřetekla. Čas, po který bude probíhat zavírání kohoutku, jsme vyjádřili jako:

$$t = \frac{Q}{q}.$$

Stejně dlouho bude trvat i otevírání kohoutku. Stejně jako při zavírání kohoutku potřebujeme změnit průtok o $101 \cdot \text{min}^{-1}$. Změnou průtoku tedy bude trvat $q = 301 \cdot \text{min}^{-2}$.

Výše jsme spočítali, že během zavírání kohoutku nateče do konve $V' = 5/31$. Stejný objem nateče i během otevírání kohoutku. Celkem tedy v průběhu otevírání a zavírání kohoutku nateče $2V' = 10/31$ vody. Zbývá nám tedy do konve nalít $V_z = V - 2V' = 101 - 10/31 = = 20/31$. Tento objem (V_z) budeme napouštět stálým průtokem $Q = 101 \cdot \text{min}^{-1}$. Čas spočteme analogicky k rovnoměrnému pohybu, tedy jako:

$$t_z = \frac{V_z}{Q}.$$

Celkový čas pak spočítáme jako součet času t , po který Lukáš kohoutek otevíral, času t_z , kdy probíhalo plnění stálým průtokem Q , a času t při zavírání kohoutku. Celkem tedy dostaneme:

$$\begin{aligned} t_c &= t + t_z + t = 2t + t_z, \\ t_c &= 2 \frac{Q}{q} + \frac{V_z}{Q}, \\ t_c &= 2 \cdot \frac{101 \cdot \text{min}^{-1}}{301 \cdot \text{min}^{-2}} + \frac{20/31}{101 \cdot \text{min}^{-1}}, \\ t_c &= \frac{4}{3} \text{ min} = 80 \text{ s}. \end{aligned}$$

Lukášovi při plnění konve voda přeteče. Kdyby ji chtěl naplnit, aby mu žádná voda nepřetekla, trvalo by to 80 sekund.

Jakub Savula
savula@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.