

Úloha V.V ... Srovnávací

7 bodů; průměr 6,27; řešilo 11 studentů

S modelem atomu se můžete setkat na každém kroku. Téměř všechny jsou ale nepřesné co se parametrů dráhy elektronu týče.

1. Spočítejte, v jaké vzdálenosti od jádra obíhá elektron podle Bohrova modelu v kationtu hélia He^+ . Výsledek vyjádřete v jednotkách Å (angstrom, Å = 10^{-10} m). Uvažujte, že se elektron nachází v základním stavu (tedy s hlavním kvantovým číslem rovným jedné).
2. Při porovnávání velikosti jádra s velikostí celého atomu proslulo přirovnání k zrnku a fotbalovému hřišti. Jaký poloměr by musel mít fotbalový stadion coby elektronový obal z předchozí úlohy, aby makové zrno o poloměru 1 mm představovalo jádro hélia o poloměru 0,5 fm?
3. Další zajímavou veličinou charakterizující v Bohrově modelu pohyb elektronu kolem jádra je frekvence oběhu. Určete, kolikrát za sekundu elektron dle Bohrova modelu naše jádro hélia oběhne.

1. Na základě vzorce odvozeného ve Výfučení můžeme pouhým dosazením hodnot spočítat vzdálenost, ve které elektron kolem jádra obíhá, pomocí vztahu

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot n^2 \hbar^2}{mZe^2}.$$

Výsledek máme spočítat pro kationt hélia, jež má právě jeden elektron, který je v základním stavu ($n = 1$). Dále víme, že helium má protonové číslo $Z = 2$, čímž máme vyřešené vše podstatné, neboť dále ve vzorci vystupují už jen konstanty.

$$\epsilon_0 \doteq 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\hbar \doteq 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$m \doteq 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$e \doteq 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Po dosazení všech příslušných hodnot do vzorce výše získáme výsledek:

$$r \doteq 0,26 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

Což je zcela správně. Nicméně každá oblast fyziky oplývá svými specifickými jednotkami, čili abychom si dokázali výsledek lépe představit, můžeme ho dostat do formátu přijatelného pro chemiky a částicové fyziky. Jednotka 10^{-10} m odpovídá právě jednomu *angstromu*, jak bylo zmíněno v zadání. Tedy pro vzdálenost oběhu elektronu získáme:

$$r \doteq 0,26 \text{ Å}.$$

Zde je krásně vidět, proč je výhodné volit jednotku angstrom. Výsledek nám vyšel přibližně v řádu jednotek angstromů. Tudíž se dá soudit, že v atomové fyzice je tato jednotka jedna z nejvíce přirozených. Podobně jako pro popis běžných vzdáleností se používají metry nebo pro popis pohybu planet ve Sluneční soustavě se používají astronomické jednotky, tak je přirozené pro rozměry atomů používat angstromy.

2. Bohužel jeden angstrom je pro nás velikost tak nepředstavitelná, že se musí zavádět různá přirovnání, která lépe osvětlují rozměry v atomu. Jedním z nich je například známé zrnko a fotbalové hřiště. Uvádí se, že velikost jádra vůči velikosti celého atomu je jako velikost zrnka máku vůči velikosti celého fotbalového stadionu. Z této slovní definice už lze vycítit nějakou matematiku poměrů či tzv. *trojčlenku*:

$$\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2},$$

kde $r_1 = 0,5 \text{ fm}$ je poloměr jádra hélia, $R_1 \doteq 0,26 \text{ Å}$ představuje poloměr atomu (za hranici atomu považujeme onu trajektorii elektronu), $r_2 = 1 \text{ mm}$ udává poloměr makového zrna a R_2 značí hledaný poloměr fotbalového hřiště. Po úpravě rovnice výše se dopídíme ke vztahu pro R_2 :

$$R_2 = \frac{r_2}{r_1} R_1.$$

Po dosazení všech hodnot získáme výsledek

$$R_2 \approx 52 \text{ m}.$$

Poloměr stadionu tak vychází 52 metrů, což přibližně odpovídá realitě. Takto jsme se snadno přesvědčili o správnosti tohoto přirovnání.

3. V poslední řadě nás zajímá, jak rychle elektron kolem jádra obíhá, respektive s jakou frekvencí. Frekvence jakožto fyzikální veličina je definovaná jako převrácená hodnota periody.

$$f = \frac{1}{T}$$

Za periodu v tomto případě považujeme čas, za který elektron vykoná jeden oběh kolem jádra (urazí vzdálenost $2\pi r$).

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Nyní už potřebujeme nalézt pouze rychlost oběhu elektronu v . Můžeme vycházet kupříkladu z jedné charakteristické identity popisující Bohrovův model atomu.

$$L = n\hbar$$

Tato rovnice se dívá na moment hybnosti elektronu jako na kvantovanou veličinu. Víme, že moment hybnosti je definován jako součin vzdálenosti tělesa od určitého středu soustavy a jeho hybnosti.

$$L = rp = rmv$$

Pokud dáme vyjádření klasického momentu hybnosti do rovnosti s tím kvantovaným, můžeme určit rychlost oběhu.

$$\begin{aligned} mrv &= n\hbar \\ v &= \frac{n\hbar}{mr} \end{aligned}$$

Tento výraz můžeme dosadit do vzorce pro periodu

$$T = \frac{2\pi mr^2}{n\hbar},$$

jejíž převrácená hodnota odpovídá frekvenci oběhu.

$$f = \frac{n\hbar}{2\pi m r^2}$$

Vzdálenost elektronu od jádra jsme již spočítali dříve a ostatní hodnoty jsme rovněž použili v předchozích výpočtech. Ve vzorci se nevyskytuje nic neznámého, a jsme tak schopni frekvenci spočítat.

$$f \approx 27 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

Jednotka $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$ se nazývá *hertz*. Vidíme, že elektron vykoná cca 27 biliard oběhů za sekundu. Zdá se to jako celkem vysoká rychlost, ale ta je naopak ve světě částic potřeba. Na závěr tak můžeme uvést jeden příklad, který dobře obhazuje náš výsledek. Když se přiblíží k atomu další atom, má elektron sice velmi nízkou, ale pořád určitou pravděpodobnost, že se mu podaří přeskočit od jednoho jádra k druhému. Jednou za několik oběhů jednoduše skočí vedle. Když se tento jev děje periodicky a elektrony skáčou sem a tam, vytváří to jistou interakci mezi atomy, které říkáme *chemická vazba*. Aby vazba byla kontinuální a se stálou silou, musí elektrony skákat opravdu rychle, že se i na úrovni atomů tyto přeskoky jeví jako nepostřehnutelné. Pokud víme, že každý přeskok nastává jednou za několik oběhů, musí elektron obíhat ještě mnohem rychleji. Kdyby elektron tak rychle neobíhal, molekuly kolem nás by nedržely pohromadě. Náš výsledek proto není vůbec šílený, naopak velmi potřebný pro náš svět.

Michal Stroff
stroffis@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.