

Úloha V.4 ... (Ne)stabilní filodendron 6 bodů; průměr 4,32; řešilo 22 studentů

Viktor postavil na policičku nad Jardovým stolem filodendron v květináči, který se plazí po nehmotné tyči ze středu květináče. Ten má tvar válce o poloměru $r = 7 \text{ cm}$ a hmotnosti $m = 350 \text{ g}$. Tyč je nakloněna vůči vodorovné rovině pod úhlem 60° . Filodendron roste rychlostí 4 mm za den. V době posledního měření měl délku $l_0 = 30 \text{ cm}$ a má délkovou hustotu (tedy hmotnost připadající na jednotku délky) $\lambda = 1,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1}$. Za jak dlouho se filodendron převáží a spadne Jardovi na stůl?



Úlohu vyřešíme pomocí momentu sil. Jediné síly, které na filodendron s květináčem působí, jsou tíhová síla a reakce policičky, na které květináč stojí. Rozdělme si tíhovou sílu na dvě části – složka působící na květináč a složka působící na samotnou rostoucí květinu. Obě dvě tyto části samozřejmě působí směrem dolů.

Nyní už se zabýváme momenty těchto dvou složek sil. Vyberme bod na spodním okraji květináče nad kterým trčí tyč s rostlinou. Právě k tomuto bodu budeme počítat momenty sil.

Moment síly od tíhy květináče pak je

$$M_k = rmg.$$

Ano, vztah je opravdu takto jednoduchý, protože uvažujeme kolmou vzdálenost mezi osou květináče, kde je působíště tíhové síly, a právě bodem, ke kterému moment síly počítáme.

Podobně najdeme druhý moment síly. Tíhová síla bude působit na rostlinu v jejím středu. Filodendron v tento moment pokládáme za úsečku o délce l . Průmět této úsečky do vodorovného směru je $l \cos \alpha$, kde $\alpha = 60^\circ$. To je pochopitelné, kdyby $\alpha = 90^\circ$ (tzn. kolmo k zemi), tak je průmět nulový.

Polovina průmětu této tyče je pak $(1/2)l \cos \alpha$. Ale pozor, vodorovná vzdálenost středu rostliny od již zmiňovaného bodu na okraji květináče je jen

$$d = \frac{l \cos \alpha}{2} - r,$$

neboť filodendron roste ze středu a ne z okraje květináče.

Moment síly způsobený tíhou rostliny pak je

$$M_r = \lambda l d g = \lambda l \left(\frac{l \cos \alpha}{2} - r \right) g,$$

kde λl je hmotnost rostliny.

Pokud bude filodendron už dostatečně vytáhlý (tedy pro $(1/2)l \cos \alpha > r$, bude tento moment síly působit na opačnou stranu než M_k . Filodendron se i s květináčem převrhne tehdy, když bude platit $M_r = M_k$. To vede na kvadratickou rovnici vzhledem k proměnné l (kterou chceme spočítat)

$$\lambda l \left(\frac{l \cos \alpha}{2} - r \right) = rm,$$

kde jsme již pokrátli g na obou stranách. Řešeními této rovnice (jak již mnozí z vás jistě dokážete také spočítat) jsou délky

$$l_{1,2} = \frac{\lambda r \pm \sqrt{\lambda^2 r^2 + 2\lambda \cos \alpha \cdot rm}}{\lambda \cos \alpha}.$$

Protože nehledáme řešení se zápornou délkou, bude naším výsledkem pro délku rostliny l výraz

$$l = r \frac{1 + \sqrt{1 + 2m \cos \alpha / \lambda r}}{\cos \alpha}.$$

Podařilo se nám najít délku rostliny, při které se celý květináč převrhne. Můžeme si po-
gratulovat, už to je velký úspěch a Jarda tak může každý den rostlinu přeměřovat, jestli už
není v kritické délce. Zadání se nás ale ptá na čas, kdy se tomu tak stane. Protože máme za-
danou rychlost růstu filodendronu, od jeho délky l pouze odečteme l_0 a vydělíme rychlostí, čímž
dostáváme odpověď

$$t = \frac{r}{v} \frac{1 - \frac{l_0}{r} \cos \alpha + \sqrt{1 + 2m \cos \alpha / \lambda r}}{\cos \alpha} \doteq 165 \text{ dní}.$$

Při vyčíslování výsledku jsme mohli dosazovat hodnoty v gramech a centimetrech.

Jaroslav Herman

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen
Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky
fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace
projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.