

Úloha II.5 ... Bezdrátová sluchátka

7 bodů; průměr 4,94; řešilo 16 studentů

Viktor si koupil nová bezdrátová sluchátka. Výrobce uvádí, že při maximální hlasitosti bude sluchátko hrát v typické vzdálenosti $l = 0,01 \text{ m}$ od ušního bubínku s hladinou intenzity $L_1 = 105 \text{ dB}$.

Nápověda: Hladinu intenzity definujeme jako:

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

kde I je intenzita zvuku, $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ odpovídá přibližně intenzitě nejslabšího zvuku, který jsme schopni slyšet, (s hladinou intenzity 0 dB) a $\log x$ je funkce *logaritmus*.



1. Jaký bude akustický výkon sluchátka při maximální hlasitosti?
2. Jaký bude podíl energie využitý na reprodukování hudby a celkové energie akumulátoru, jestliže sluchátko dokáže hrát na jedno nabití $t = 4 \text{ h}$? Sluchátko má v sobě zabudovaný akumulátor s napětím $U = 3,7 \text{ V}$ a nábojem $Q = 40 \text{ mAh}$.
3. Viktor ztratil sluchátko někde na louce, která je $a = 350 \text{ m}$ dlouhá a $b = 200 \text{ m}$ široká. Jaká je pravděpodobnost, že Viktor stojící uprostřed louky sluchátko po zapnutí na maximální hlasitost uslyší, jestliže hladina intenzity zvuku ze sluchátka by musela být u Viktora alespoň 45 dB ?

Sluchátka můžeme aproximovat bodovým všesměrovým zdrojem.

Známe hladinu intenzity sluchátek ve vzdálenosti l od ušního bubínku. Ta odpovídá nějaké intenzitě I , kterou můžeme spočítat podle vzorce, který se objevil v zadání. Zatím nebudeme do vzorce dosazovat konkrétní hodnoty, pouze si pomocí základních operací s logaritmy vyjádříme ze vzorce I .

$$\begin{aligned} L_1 &= 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}, \\ \frac{L_1}{10} &= \log \frac{I}{I_0}, \\ 10^{L_1/10} &= 10^{\log I/I_0}, \\ 10^{L_1/10} &= \frac{I}{I_0}, \\ I &= I_0 \cdot 10^{L_1/10}. \end{aligned}$$

Potom už bude stačit vynásobit intenzitu I plochou S , do které se v této vzdálenosti zvuk sluchátek rozprostírá, a dostaneme hledaný akustický výkon P . Pro plochu S použijeme standardní vzorec pro povrch koule (v tomto případě o poloměru $r = l$).

$$P = S \cdot I = 4\pi r^2 \cdot I_0 \cdot 10^{L_1/10}.$$

Jelikož nás zajímá číselný výsledek, musíme ještě do výsledného vzorce dosadit konkrétní hodnoty ze zadání:

$$P = 4\pi l^2 \cdot I_0 \cdot 10^{L_1/10} = 4\pi \cdot (0,01 \text{ m})^2 \cdot 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 10^{105 \text{ dB}/10} \doteq 3,97 \cdot 10^{-5} \text{ W}.$$

Sluchátka tedy budou mít při maximální hlasitosti akustický výkon jen přibližně $4 \cdot 10^{-5} \text{ W}$.

V druhé části úlohy chceme spočítat podíl mechanické energie zvuku E_m a elektrické energie akumulátoru E_e . Mechanickou energii zvuku zjistíme jako součin výkonu P , který jsme právě spočítali, a času t , po který zvládla sluchátka hrát na maximální hlasitost.

$$E_m = P \cdot t.$$

V akumulátoru je energie uchována ve formě práce, kterou vykoná elektrické pole při přesunu náboje Q mezi místy s různými potenciály. Jelikož je napětí rovno rozdílu potenciálů, máme:

$$E_e = U \cdot Q.$$

Musíme si ale dát pozor na jednotky. Naštěstí je náboj zadán v miliapérhodinách a čas v hodinách, takže se nám hodiny hezky vykrátí a bude stačit převést miliampéry na ampéry.

Zbývá vyjádřit výsledný poměr (rovnou dosadíme i konkrétní hodnoty ze zadání). Při dosazování konkrétních hodnot nezapomeneme za P dosadit přesnou nezaokrouhlenou hodnotu, kterou jsme získali v první části úlohy.

$$\frac{E_m}{E_e} = \frac{P \cdot t}{U \cdot Q} \doteq \frac{3,97 \cdot 10^{-5} \text{ W} \cdot 4 \text{ h}}{3,7 \text{ V} \cdot 40 \cdot 10^{-3} \text{ Ah}} \doteq 1,07 \cdot 10^{-3}.$$

Na mechanickou energii zvuku se tedy přemění jen asi desetina procenta energie uložené v akumulátoru.

Při řešení poslední části úlohy si více přiblížíme fungování logaritmických veličin, mezi které lze zařadit právě hladinu intenzity zvuku L . Hrají-li sluchátka ve vzdálenosti l s hladinou intenzity $L_1 = 105$ dB a Viktor zvládne registrovat alespoň $L_2 = 45$ dB, znamená to, že je uslyší ještě na tisícinásobek vzdálenosti l . Proč? Mezi 45 dB a 105 dB je rozdíl 60 dB. Každých 10 dB znamená desetinásobný rozdíl intenzity zvuku. To znamená, že Viktor sluchátka uslyší ještě ve vzdálenosti, v níž bude mít zvuk milionkrát nižší intenzitu než ve vzdálenosti l . Intenzita ovšem klesá s druhou mocninou vzdálenosti, takže vzdálenost, ve které je hladina intenzity rovná L_2 , nebude milionkrát větší než je l , ale jen tisíckrát větší ($\sqrt{1\,000\,000} = 1\,000$). Tisícnásobek jednoho centimetru je deset metrů, pokud tedy označíme tuto vzdálenost l' , máme $l' = 10$ m.

Mohli bychom postupovat i více „matematicky“ (tento přístup je s předchozím samozřejmě ekvivalentní) a využít základních pravidel pro počítání s logaritmy:

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y, \quad \log(x^2) = 2 \log x.$$

Přejdeme nyní k výpočtu. Známe hladinu intenzity L_1 pro vzdálenost l a chceme spočítat vzdálenost l' , při které je hladina intenzity $L_2 = 45$ dB. Navíc víme, že intenzita zvuku klesá s druhou mocninou vzdálenosti, pro poměr intenzit tedy máme:

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{l'}{l}\right)^2.$$

Tento poměr nyní dále využijeme k vyřešení úlohy. Všimněme si, že pokud vypočítáme rozdíl $L_1 - L_2$, tak dostaneme:

$$L_1 - L_2 = 10 \cdot \left(\log \frac{I_1}{I_0} - \log \frac{I_2}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{I_1/I_0}{I_2/I_0} \right) = 10 \log \frac{I_1}{I_2}.$$

Z předchozího pak máme:

$$L_1 - L_2 = 10 \log \left(\frac{l'}{l} \right)^2 = 20 \log \frac{l'}{l},$$

kde jsme využili obě zmíněná pravidla pro počítání s logaritmy. Z tohoto vztahu nyní stačí jen vyjádřit l' a dostaneme stejný výsledek, jako jsme dostali „méně matematickou“ úvahou, tedy:

$$l' = l \cdot 10^{(L_1 - L_2)/20} = 10 \text{ m}.$$

Pravděpodobnost p , že Viktor uslyší uprostřed louky sluchátko, které se může nacházet kdekoliv, je potom rovna podílu ploch kruhu s poloměrem l' a plochy louky $a \cdot b$.

$$p = \frac{\pi r^2}{a \cdot b} = \frac{\pi (10 \text{ m})^2}{350 \text{ m} \cdot 200 \text{ m}} = \frac{1}{700} \pi \doteq 4,49 \cdot 10^{-3}.$$

Viktor tedy sluchátko uslyší s pravděpodobností menší než půl procenta. Dobrou zprávou je, že v nejhorším případě mu k jeho nalezení bude stačit prohledat louku po pásích širokých $2 \cdot l' = 20 \text{ m}$. To by znamenalo nachodit skoro 4 km.

Viktor Materna
materna@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.