

Úloha I.5 ... Letadlová

7 bodů; průměr 3,62; řešilo 65 studentů

Letadlo stoupá pod úhlem 3° tak, aby se dostalo do požadované výšky $h = 10\,972$ m. Pokud u toho zrychluje se zrychlením $a = 20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$ z $v_0 = 300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ na $v_{\max} = 880 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, za jak dlouho dosáhne požadované výšky h a za jak dlouho rychlosti $v_{\max}$? Za jak dlouho by to bylo se stoupáním pod úhly 2° a 4° ? Mění se pak čas pro tyto různé případy lineárně, nebo ne? A proč?



Letadlo se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem, proto čas, za který dosáhne maximální rychlosti, určíme jednoduše jako:

$$t_{\max} = \frac{v_{\max} - v_0}{a}.$$

Před dosazením číselných hodnot si ještě musíme rozmyslet, jak si poradit s jednotkami. Všimněme si, že když rychlosti i zrychlení ponecháme v zadaných jednotkách, vyjde výsledný čas v minutách:

$$t_{\max} = \frac{880 - 300}{20} \frac{\text{km} \cdot \text{h}^{-1}}{\text{km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}} = 29 \text{ min}.$$

Další výpočet je již o něco komplikovanější. Pohyb letadla si rozdělíme na dvě části. V první části se letadlo pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a , dokud nedosáhne rychlosti $v_{\max}$, a v druhé části už pokračuje v letu konstantní rychlostí $v_{\max}$. Přitom však bohužel nevíme, jestli se do výšky h dostane před dosažením maximální rychlosti, nebo až poté.

Zvolíme proto následující postup: nejprve budeme předpokládat, že pohyb letadla je rovnoměrně zrychlený po celou dobu stoupání, a vypočítáme pro toto stoupání čas letu. Pokud nám vyjde čas menší než $t_{\max}$, tak jsme hotovi, neboť letadlo v průběhu stoupání ještě nedosáhlo maximální rychlosti a pohyb byl proto skutečně v průběhu stoupání rovnoměrně zrychlený. Schématicky je tato možnost znázorněna na grafu 1.

Na druhou stranu, pokud by nám vyšel větší čas, tak by to znamenalo, že je náš předpoklad chybný a letadlo dosáhne maximální rychlosti již v průběhu stoupání, viz graf 2.

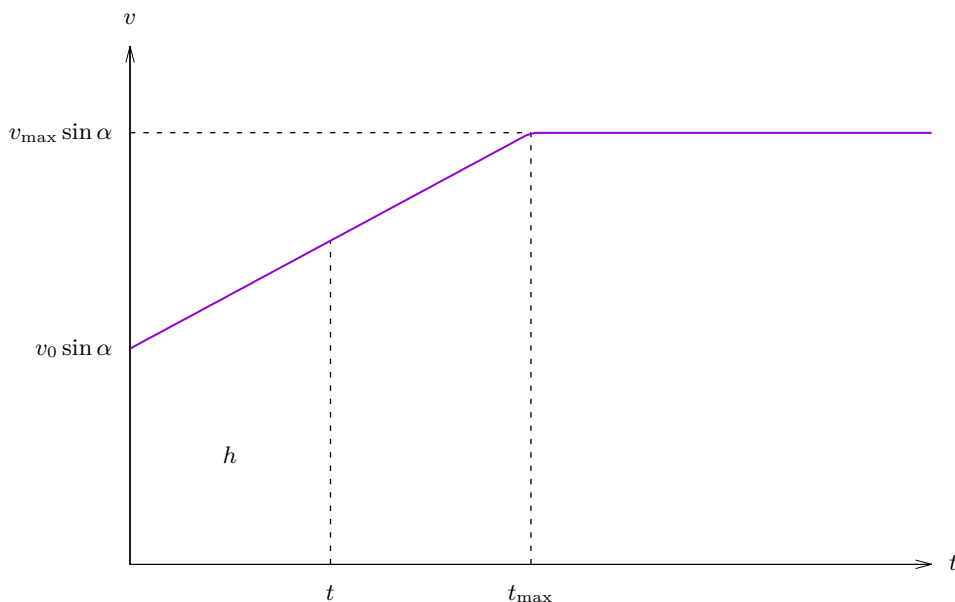
Pak budeme muset náš výpočet změnit a napřed spočítat výšku h_0 , do které se dostane při zrychlování, a poté počítat, že zbývající část výškového rozdílu $h - h_0$ se pohybuje rovnoměrně, a dobu tohoto pohybu přičíst k $t_{\max}$.

Přejdeme nyní k výpočtům. Letadlo se pohybuje rychlostí v , nás však zajímá pouze jak rychle stoupá. Chceme tedy svislou složku tohoto pohybu, tu vypočítáme pomocí *goniometrické funkce* sinus jako:

$$v' = v \cdot \sin \alpha,$$

kde α je úhel stoupání. Svislá složka rychlosti je urychlována svislou složkou zrychlení a' :

$$a' = a \cdot \sin \alpha.$$



Obrázek 1: Graf znázorňuje závislost svislé složky rychlosti letadla na čase, plocha pod tímto grafem pak vyjadřuje změnu výšky. V této možnosti uvažujeme, že se letadlo dostane do výšky h ještě před dosažením maximální rychlosti.

Z toho spočítáme dobu letu pro rovnoměrně zrychlený pohyb (na základě našich předchozích úvah). Pro dráhu zrychleného pohybu s nenulovou počáteční rychlostí platí:

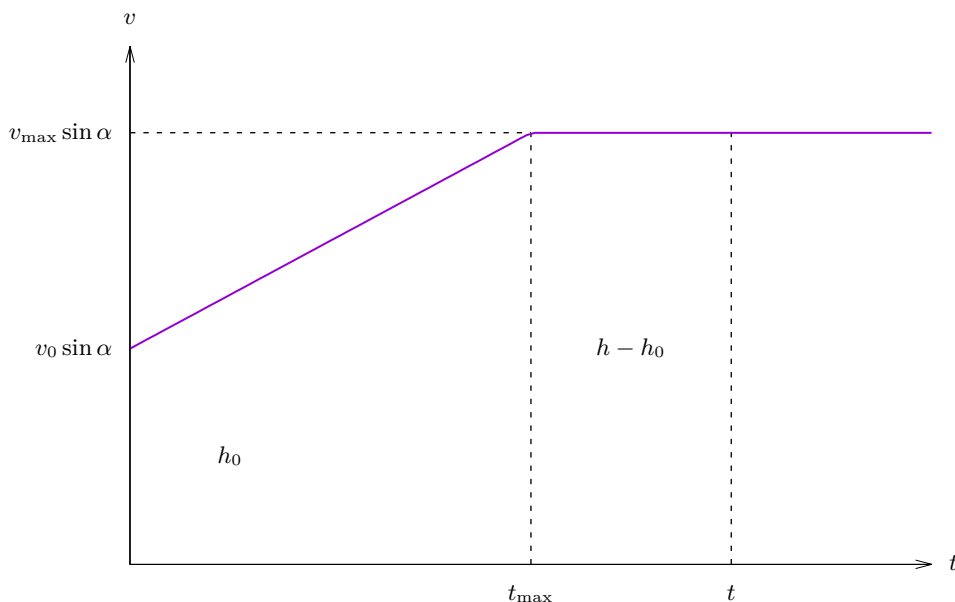
$$\begin{aligned}
 h &= v_0' t + \frac{1}{2} a' t^2, \\
 h &= v_0 \sin \alpha \cdot t + \frac{1}{2} a \sin \alpha \cdot t^2, \\
 0 &= t^2 + \frac{2v_0}{a} t - \frac{2h}{a \sin \alpha}.
 \end{aligned}$$

Vidíme, že se jedná o kvadratickou rovnici (chceme vypočítat čas t):

$$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Vyřešíme ji klasickým postupem, napřed spočítáme diskriminant:

$$D = B^2 - 4A C = \frac{4v_0^2}{a^2} + 4 \cdot \frac{2h}{a \sin \alpha}.$$



Obrázek 2: Graf znázorňuje případ, kdy letadlo dosáhne maximální rychlosti (v čase $t_{\max}$) ještě před vystoupaním do výšky h . Zbytek cesty proto urazí rovnoměrným pohybem.

Řešení této rovnice je pak dáno (zajímá nás pouze kladné řešení, protože záporný čas zde nemá fyzikální význam):

$$t = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A},$$

$$t = -\frac{v_0}{a} + \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} + \frac{2h}{a \sin \alpha}}.$$

Tentokrát již nemůžeme vše nechat v zadaných jednotkách. Je výhodnější pracovat v kilometrech a hodinách (protože pak nemusíme převádět rychlost), proto h a a převedeme na:

$$h = 10,972 \text{ km} \qquad a = 1\,200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-2}.$$

Teď už můžeme všechny hodnoty dosadit do našeho vztahu pro t a vypočítat časy postupně pro všechny úhly stoupání:

$$\begin{aligned} t(2^\circ) &= 30,1 \text{ min}, \\ t(3^\circ) &= 23,5 \text{ min}, \\ t(4^\circ) &= 19,2 \text{ min}. \end{aligned}$$

Pro úhly 3° a 4° jsme dostali menší čas než $t_{\max} = 29 \text{ min}$, takže pro ně už další výpočty provádět nemusíme. Pro 2° však musíme čas vypočítat znovu. Na základě našeho postupu tedy

spočítáme napřed výšku, do které se letadlo dostane před dosažením $v_{\max}$. Použijeme k tomu stejnou rovnici pro rovnoměrně zrychlený pohyb:

$$h_0 = v_0 \sin \alpha \cdot t_{\max} + \frac{1}{2} a \sin \alpha \cdot t_{\max}^2.$$

Zbývající část letu je již rovnoměrný pohyb rychlostí $v_{\max}$, přičemž nás stále zajímá pouze její svislá složka. Čas tohoto pohybu je:

$$\tau = \frac{h - h_0}{v_{\max} \sin \alpha},$$

z čehož získáme výsledný čas tím, že k τ přičteme $t_{\max}$ (doba první části letu):

$$t(2^\circ) = \tau + t_{\max},$$

$$t(2^\circ) = t_{\max} + \frac{h}{v_{\max} \sin \alpha} - \frac{v_0}{v_{\max}} t_{\max} - \frac{at_{\max}^2}{2v_{\max}},$$

$$t(2^\circ) = 31,0 \text{ min}.$$

Opět jsme dosadili číselné hodnoty vyjádřené v kilometrech a hodinách. Doby letu pro jednotlivé úhly stoupání vyšly: 19,2 min, 23,5 min a 31,0 min. Z výpočtů a výsledků vidíme, že se čas letu v závislosti na úhlu rozhodně lineárně nemění.

Jiří Kohl

jirkak@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.