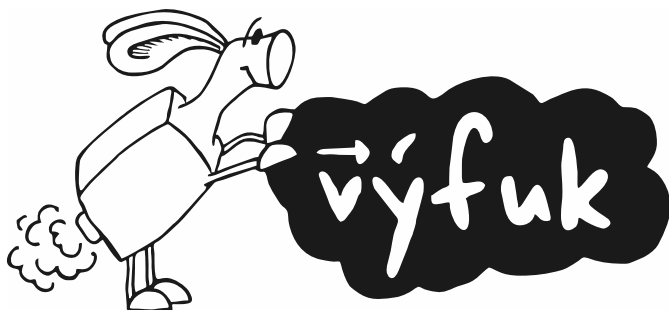
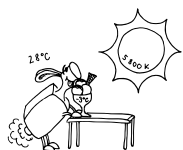
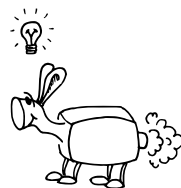




výpočty fyzikálních úkolů



Řešení I. části prázdninové série



Úloha I.1 ... Prázdninový kvíz

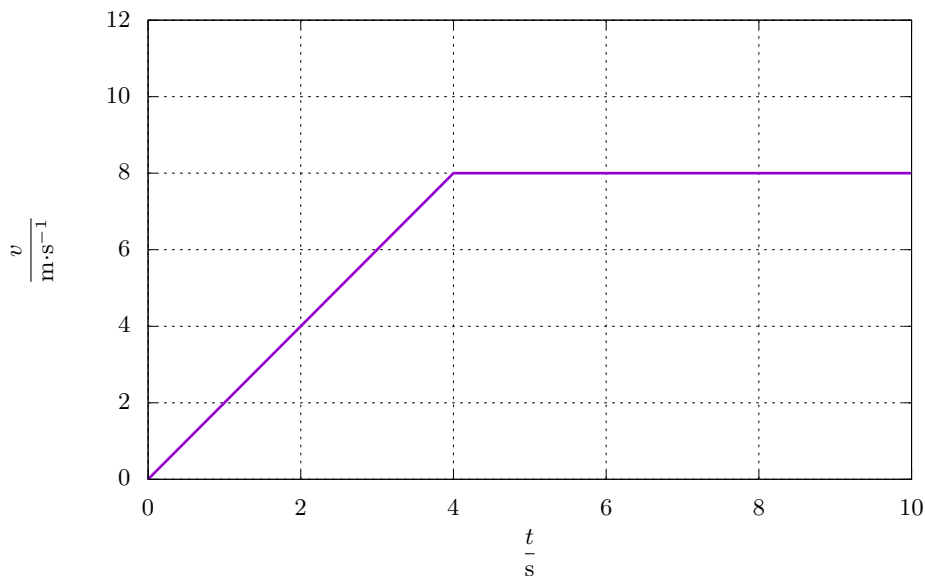
10 bodů; průměr 6,27; řešilo 476 studentů

- Který druh cukru se v čaji rozpustí nejrychleji?
 - moučka
 - krupice
 - krystal
 - kostkový
- Proč se ocelová loď nepotopí, ale plave na hladině?
 - kvůli povrchovému napětí
 - kvůli vyšší hustotě slané vody
 - kvůli nízké hustotě oceli
 - loď vytlačuje velké množství vody
- Který parametr neovlivňuje difuzi částic?
 - velikost částic
 - tvár částic
 - teplota
 - věk experimentátora
- Co můžeme použít v elektrickém obvodu místo baterie?
 - dřevo
 - citron
 - olej
 - diamant
- Která jednotka není jednotkou SI?
 - sekunda
 - libra
 - ampér
 - kandela
- Pokud do válce nalijeme rtuť, olej a vodu, seřadí se tyto kapaliny odspodu v pořadí:
 - rtuť, voda, olej
 - voda, rtuť, olej
 - rtuť, olej, voda
 - olej, voda, rtuť

7. V jaké skupenství se změní plyn, pokud ho hodně zahřejeme?¹

- a) přemění se na kapalinu
- b) přemění se na pevnou látku
- c) přemění se v plazma
- d) plyn už se při zahřívání v žádné další skupenství nezmění

8. V grafu 1 můžete vidět závislost rychlosti běžce na čase. Graf zobrazuje jeho rychlost v časovém intervalu 10 s. Jakou vzdálenost běžec během zmíněných 10 s uběhl?



Obrázek 1: Rychlost běžce v čase

- a) 60 m
- b) 58 m
- c) 64 m
- d) 50 m

9. Co je pro všechny planety stejné?

- a) jejich objem
- b) tíhové zrychlení na jejich povrchu
- c) gravitační zrychlení na jejich povrchu
- d) gravitační konstanta

10. Vyzařuje Měsíc vlastní paprsky?

- a) ano, vyzařuje vlastní paprsky
- b) ne, pouze odráží paprsky, které vyzařuje Slunce
- c) ano, jeho povrch fluoreskuje
- d) ne, pouze odráží paprsky, které vyzařuje Země

¹Uvažujte, že objem udržujeme přibližně konstantní.

1. Správná odpověď: a

Jediný rozdíl ve vypsaných typech cukru je velikost jednotlivých zrníček (zrníčkem zde pro jednoduchost rozumíme i samotnou kostku cukru), chemické složení je vždy stejné. Je zřejmé, že čím menší je zrníčko, tím rychleji se rozpustí, přičemž cukr moučka má zrníčka nejmenší.

2. Správná odpověď: d

Na každé těleso ponořené v kapalině v tíhovém poli působí vztlaková síla. Vztlaková síla je podle Archimédova zákona úměrná objemu ponořené části tělesa a objem ponořené části tělesa je zřejmě roven objemu vytlačené kapaliny. Pokud tedy chceme, aby se loď nepotopila, musí vytlačovat velké množství vody vzhledem ke svojí hmotnosti (konkrétně to množství vody musí být stejně těžké jako loď). Alternativní způsob, jak na Archimédův zákon pohlížet, je, že se loď nepotopí, jestliže je její *průměrná* hustota menší než hustota vody. Jelikož materiál, ze kterého je loď vyrobená, by sám o sobě ve vodě neplaval (ocel má přibližně 8krát větší hustotu než voda), musí být v lodi dostatečně velké prostory vyplněné například vzduchem, které sníží průměrnou hustotu, a loď se pak nepotopí.

3. Správná odpověď: d

Pokud na jednom konci místnosti rozbijeme skleničku s voňavkou, tak po chvíli voňavku ucítíme i na druhém konci místnosti. Difuzí rozumíme přesně tento typ přesunu částic (tedy pochopitelně ne pouze rozptýl částíček voňavky v místnosti naplněné vzduchem, ale obecně promíchávání libovolných dvou typů částic). Zajímavé na difuzi je, že částice voňavky se nepřesunou na druhý konec místnosti vlivem nějaké záhadné síly. Přesunou se tam, protože prostě můžou. Podrobněji: každá částice, ať už plynu, kapaliny nebo pevné látky, se pohybuje nějakou rychlostí, která roste s teplotou látky. Čím rychleji se částice pohybují, tím rychleji se dostanou na druhý konec místnosti, proto teplota difuzi rozhodně ovlivňuje. Částice voňavky se však místností nepohybují volně, při pohybu narážejí do částic vzduchu. Tyto nárazy částice zpomalují, platí tedy čím více nárazů, tím pomalejší difuze. Počet nárazů je zřejmě úměrný jak velikosti částic, tak tvaru částic, proto jediný z uvedených parametrů, který neovlivňuje difuzi částic, je zřejmě věk experimentátora.

4. Správná odpověď: b

Citron můžeme, na rozdíl od ostatních zmíněných materiálů, použít místo baterie díky jeho dvěma důležitým vlastnostem: obsahuje kyselinu a uvnitř něj se nachází vodivé prostředí. Samozřejmě samotný citron na vznik elektrického napětí nestačí, potřebujeme ještě dva kusy různých kovů, které do citronu zapíchneme. Alespoň jeden z těchto dvou kovů při tom musí být tzv. *neušlechtilý*. Neušlechtilý kov znamená, že (dobře) reaguje s kyselinou.

Proč některé kovy s kyselinou reagují a některé ne? Záleží na tom, jak dobře se zbavují elektronů. Příkladem neušlechtilého kovu je zinek. Když necháme zinek reagovat například s kyselinou sírovou, tak vznikne ZnSO_4 , kde má síra oxidační číslo +6 a kyslík má -2, zinek se tedy musí zbavit dvou elektronů, aby s kyselinou sírovou zreagoval. Zbavit se elektronů je pro různé prvky různě těžké. Některým musíme dodat energii, abychom jim elektron vzali, a u některých se naopak při odstranění elektronu energie uvolní. Neušlechtilé kovy jsou pak ty, které energii uvolňují, a ušlechtilé s kyselinou samovolně nereagují, protože bychom jim museli energii dodat. Proto se v přírodě ušlechtilé kovy vyskytují typicky ryzí a neušlechtilé uvnitř sloučenin.

Vratme se zpět k našemu citronu. Pokud tedy do citronu zapícháme tyčku z neušlechtilého kovu, například zinku, tak zinek reaguje s kyselinou v citronu, čímž vzniká zinková sůl a na zinkové tyčce zůstanou elektrony, které mají menší potenciální energii, než by měly v neutrálním zinku (energie, která se při reakci zinku s kyselinou uvolní, odpovídá právě tomuto rozdílu potenciální energie).

Tyto volné elektrony bychom nyní chtěli využít k vedení proudu. K tomu potřebujeme do citronu zapíchnout druhou kovovou tyčku a spojit ji s první drátem. Druhá tyčka už však nesmí být ze zinku (t.j. nesmí být ze stejného materiálu)! Pokud by byla, pak by se opět uvolnily elektrony se stejnou potenciální energií a žádný proud by netekl. Potřebujeme tedy jiný kov, vhodné jsou při tom ušlechtilé kovy, jelikož elektrony přitahují, takže je rozdíl potenciálních energií, a tím pádem i napětí, větší.

Když tedy použijeme například měď a vše spojíme drátem, uzavřeme tím elektrický obvod. Zinek bude při reakci s kyselinou v citronu uvolňovat elektrony a kyselina uvolní kladné vodíkové ionty (kyselina obvykle reaguje tak, že se zbavuje vodíkových iontů). Volné elektrony budou putovat drátem až do měděné tyčky a vodíkové ionty putují skrze citron, kde se na měděné tyčce opět spojí s dovedenými elektrony a neutrální vodík pak opustí citron. Tento mechanismus zajistí stálý zdroj napětí, dokud je v citronu dost kyseliny na reakci se zinkem (pokud bychom elektrony z měděné tyčky neodváděli, tak by se napětí postupně zmenšovalo).

5. Správná odpověď: b

Všechny ostatní jednotky jsou SI, dokonce jsou to *základní* jednotky. Jediná libra je *imperiální* jednotka, tedy používaná ve Velké Británii, USA a v některých dalších zemích Commonwealthu.

6. Správná odpověď: a

Kapaliny se seřadí v důsledku stejné vztahové síly popsané v podúloze 2., tedy tak, že kapaliny s menší hustotou jsou tlačeny nahoru. Rtuť má největší hustotu, pak následuje voda a nejllehčí je olej.

7. Správná odpověď: c

Zahříváním plynu mu dodáváme energii a tuto energii mimo jiné pohlcují i elektrony v obalu atomů plynu. Když je pohlcená energie dostatečná, elektron unikne přitažlivé síle atomu a plyn se ionizuje. Dodáním opravdu velkého množství energie se pak může stát, že atomy postupně přijdou o všechny elektrony, zbudou tedy jen jádra atomu a volné elektrony, t.j. skupenství plazma.

8. Správná odpověď: c

Na grafu rychlosti v závislosti na čase je ураžená dráha číselně rovna ploše „pod grafem“ v příslušných jednotkách. To plyne z faktu, že $s = vt$. Jen je potřeba si rozmyslet, co se bude dít, pokud se rychlost s časem mění. Spočítáním plochy pod křivkou máme: $s = 6 \cdot 8\text{ m} + 4 \cdot 8/2\text{ m} = 64\text{ m}$. Alternativní způsob řešení je s využitím vzoreček pro dráhu rovnoměrného a rovnoměrně zrychleného pohybu, kde je napřed potřeba spočítat, že zrychlení v první části pohybu je rovno $2\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

9. Správná odpověď: d

Planety jsou obecně různě velké a různě hmotné, mají tedy obecně různá zrychlení na povrchu. Jediné, co je pro všechny planety stejné, je gravitační konstanta $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ což je univerzální konstanta, která popisuje vztah mezi gravitační silou, kterou na sebe působí 2 tělesa, jejich hmotnostmi a jejich vzájemnou vzdáleností. Tento vztah se nazývá Newtonův gravitační zákon.

10. Správná odpověď: a

Tato úloha je trochu chyták. Paprsky, které pozorujeme pouhým okem jsou samozřejmě odražené ze Slunce, případně i nějaká malá část paprsků je ze Země (která také odráží paprsky ze Slunce). Kromě těchto paprsků však každé těleso tzv. *tepelně září*. U těles, která potkáme v běžném životě toto záření pouhým okem nevidíme, jelikož velká část tohoto záření je záření *infračervené*. K detekování takového záření lze použít například *termokamery*, které díky tomu, že vlastnosti tepelného záření závisí na teplotě, dokáží i ve tmě rozlišit mezi živočichy a neživými předměty.

Jiří Kohl
jirkak@vyfuk.org

Úloha I.2 ... Newton a jablko

10 bodů; průměr 4,43; řešilo 123 studentů

Snad každý zná příběh o objevu gravitace. Isaac Newton údajně objevil svou slavnou teorii inspirován tím, že mu na hlavu spadlo ze stromu jablko. V této úloze se zamyslíme, jak pravděpodobné je, že k tomu skutečně došlo. Předpokládejme, že by Newton seděl pod stromem každý den 3 hodiny. Kolik let by musel průměrně pod stromem sedávat, aby mu na hlavu spadlo jedno jablko?

Všechny potřebné údaje si buď dohledejte nebo odhadněte.



Zkusme si nejprve napsat rovnici popisující, kolik jablek průměrně Newtonovi spadne na hlavu za T let. Označme průměrný počet jablek, která spadnou ze stromu za 1 rok, jako f_j . Pokud ho vynásobíme počtem let T , která Newton prosedí pod stromem, tak získáme celkový počet spadnuvších jablek. Ten nakonec vynásobíme pravděpodobností p , že jedno jablko spadne na jeho hlavu. Označíme-li N průměrný počet jablek, která mu spadnou na hlavu, získáváme rovnici

$$N = f_j T p.$$

Nás zajímá doba T_1 , za níž spadne Newtonovi na hlavu průměrně 1 jablko. Dosadíme tedy $N = 1$ a vyjádříme z rovnice počet let, čímž dostaneme

$$T_1 = \frac{1}{f_j p}.$$

Nejobtížnější částí této úlohy je určení pravděpodobnosti p , že dané jablko spadne na Newtonovu hlavu. Je velmi užitečné si uvědomit, že tato pravděpodobnost se ve skutečnosti skládá ze dvou pravděpodobností. První z těchto dvou je p_t , která udává pravděpodobnost, že Newton je v okamžiku, kdy jablko padá, vůbec pod stromem. Druhou pak je pravděpodobnost p_x , která udává pravděpodobnost, že se jablko do Newtonovy hlavy skutečně trefí, tedy že jablko padá skrz prostor, kde se nachází jeho hlava. Pravděpodobnost p udává pravděpodobnost

jevu, který odpovídá současnému splnění obou těchto jevů, proto ji získáme jako součin obou pravděpodobností, tedy

$$p = p_t p_x.$$

Začneme tím, že spočítáme pravděpodobnost p_t . K tomu využijeme jediného údaje, který je přímo zadáný, že Newton sedí pod stromem každý den 3 hodiny. Velmi snadno spočítáme, že to odpovídá $1/8$ dne. V zadání je též uveden předpoklad, že pod stromem sedává každý den. Z toho plyne, že pod jabloní sedí $1/8$ času. Je tedy nejpřirozenější předpokládat, že v době pádu libovolného jablka je pravděpodobnost, že Newton sedí pod stromem též $1/8$.² Tím tedy získáváme $p_t = 1/8$.

Pro určení pravděpodobnosti p ještě potřebujeme odhadnout pravděpodobnost p_x . Zajímá nás tedy, jaká je pravděpodobnost, že jablko padající ze stromu by se alespoň dotklo jeho hlavy. Situaci si zde trochu zjednodušíme tím, že budeme předpokládat, že jablka padají na všechna místa pod stromem stejně často. Toto nejspíš nebude zcela správný předpoklad, protože koruna stromu není placatá, ale má spíše tvar koule. Navíc nevíme, na jakých částech stromu jablka nejčastěji rostou. Stejně tak však nevíme, na jakém místě pod stromem Newton sedával, lze tedy na toto nahlížet jako na jistý průměr pravděpodobnosti. Tento předpoklad nám již nyní umožňuje vypočítat pravděpodobnost p_x . Plyne z něj totiž, že mezi pravděpodobnostmi, že jablko spadne do nějaké plochy, a velikostí této plochy je přímá úměrnost. Zároveň je také zřejmé, že pravděpodobnost, že jablko spadne někam pod strom, je 1. (Jinak řečeno je jisté, že když jablko padá, tak spadne někam pod strom.) Z tohoto získáváme pro pravděpodobnost p_x rovnici

$$\frac{p_x}{1} = p_x = \frac{S_H}{S_C},$$

kde S_H je plocha, do níž musí jablko spadnout, aby trefilo Newtona do hlavy a S_C je celková plocha pod korunou stromu.

Při počítání plochy S_H bychom si měli uvědomit, že to není jen plocha Newtonovy hlavy, ale plocha, do které bude-li náležet střed jablka, tak hlavu trefí. Tato plocha je trochu větší, neboť i jablko, jehož střed bude těsně vedle hlavy, do hlavy narazí. Pokud budeme uvažovat, že při pohledu shora má hlava i jablko kruhový tvar, a označíme poloměr jablka jako r_J a poloměr hlavy r_H , pak i plocha S_H bude kruhová a její poloměr bude $r_J + r_H$. Pokud budeme předpokládat, že koruna stromu má při pohledu shora též přibližně kruhový tvar s poloměrem R_S , tak poté platí, že celková plocha, kam může jablko dopadnout, bude též kruhová s poloměrem R_S . Pro pravděpodobnost p_x poté tedy dostáváme

$$p_x = \frac{S_H}{S_C} = \frac{\pi(r_J + r_H)^2}{\pi R_S^2} = \frac{(r_J + r_H)^2}{R_S^2}.$$

Tento odvozený vzorec nyní nejprve dosadíme do vztahu pro pravděpodobnost p a ten následně poté do rovnice pro počet let T_1 , který musí Newton strávit pod stromem, aby mu na hlavu průměrně spadlo 1 jablko. Tím dostaneme výsledný vztah

$$T_1 = \frac{8R_S^2}{(r_J + r_H)^2 f_j}.$$

Nyní již jen potřebujeme odhadnout veličiny, které ve výsledném vztahu vystupují. Dle internetové verze encyklopedie Britannica³ mají jabloně v přírodě průměr koruny asi 9 m, a po-

²Tento předpoklad není tak zřejmý, jak by se mohlo zdát. Například pokud by Newton spíše volil pro své posezení dobu, kdy jablka padají nadprůměrně často, tak by tento předpoklad nebyl správný. Vzhledem k zadaným údajům je však tento předpoklad logičtější než kterýkoliv jiný.

³<https://www.britannica.com/plant/apple-fruit-and-tree>

loměr je tedy $R_S = 4,5$ m. Průměr jablek samotných je běžně asi 5 – 10 cm, pročež v našich výpočtech budeme pro jejich poloměr používat hodnotu $r_J = 3,75$ cm.

Předpokládáme-li, že jablka nikdo neočesává, tak počet jablek, která ze stromu spadnou, je přibližně stejný jako počet jablek, která na něm vyrostou. Dle zdrojů dostupných online⁴ jsme nakonec dospěli k tomu, že jablko, která není určena ke komerčnímu využití (tedy taková, kterou bychom v Newtonově čase nejspíš očekávali), za dobrý rok vynese asi 80 – 150 jablek. Pro náš odhad tedy použijeme hodnotu $f_J = 115$ jablek za rok.

Nakonec zbývá ještě odhadnout poloměr hlavy. K tomu využijeme Wikipedii⁵, která udává, že šířka hlavy je u mužů v průměru asi 15 cm a její délka přibližně 22 cm. Pokud tedy budeme uvažovat, že by měla hlava kruhový tvar, tak je nejpřirozenější uvažovat její průměr jako 18,5 cm a poloměr poté bude $r_H = 9,25$ cm. Nyní již jen dosadíme a získáme výsledek

$$T_1 = 83,4 \text{ let}.$$

Poznamenejme ještě, že náš výsledek rozhodně neznamená, že na Newtonovu hlavu spadne jablko přesně po 83,4 letech, ani že za 83,4 let mu na hlavu spadne celkem právě jedno jablko. Říká, že za 83,4 let mu na hlavu spadne *průměrně* jedno jablko. Jak tomu rozumět? Představme si, že by Newton pod stromem sedával tisíce let. Pokud bychom sečetli všechna jablka, která mu spadla na hlavu, a vydělili je celkovým počtem let, tak bychom dostali přibližně $1/83,4$ let. Další možnost, jak na výsledek pohlížet, je v řeči pravděpodobnosti. Konkrétně v tomto případě se dá spočítat, že po $T_1 = 83,4$ letech je pravděpodobnost, že na Newtonovu hlavu spadlo alespoň jedno jablko, rovna přibližně 63 %. Mohlo by se tedy stát, že mu za 80 let spadne na hlavu 10 jablek, nebo že mu po 200 letech na hlavu nespadne jediné jablko. Náš výsledek nám ale říká, že jsou tyto možnosti nepravděpodobné.

Vidíme tedy, že dle našich odhadů by Newton musel pod stromem sedávat opravdu hodně dlouho. Výsledek samozřejmě není zcela přesný, jelikož odhady, které jsme použili, se mohou i značně lišit od skutečných hodnot pro nějakou konkrétní jablko. K nejvýraznějším odchylkám bude nejspíš docházet u rozměrů stromu a počtu jablek, které na něm za rok vyrostou. Obě hodnoty se mohou u různých jabloní lišit i několikanásobně. Zjednodušení, že jablka padají na všechna místa pod stromem se stejnou pravděpodobností, které jsme využili při výpočtu pravděpodobnosti p_x , bude v porovnání s nejistotami v hodnotách odhadovaných veličin zanedbatelné. I přes to, že je nejistota odhadu poměrně velká, tak je pravděpodobné, že i pro jiné hodnoty bude čas T_1 vycházet jako alespoň několik desítek let, z čehož můžeme soudit, že příběh o Newtonovi a jablku je dost nepravděpodobný.

Aleš Opl
ales@vyfuk.org

Úloha I.3 ... Vlastnosti vlaštovek

10 bodů; průměr 6,15; řešilo 121 studentů

Bětko v létě ležela na zádech v trávě a přemýšlela o krásách fyziky. Myšlenky se jí však postupně zatoulaly ke kluzákům, které jí létaly nad hlavou. Zamyslela se, jak je možné, že umí volně plachtit, aniž by spadly na zem. Rychle se zvedla a běžela domů, kde se pokusila poskládat si z papíru vlaštovku s co největším doletem.



⁴<https://wikifarmer.com/qas-apple-tree/>

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Human_head

Udělej to stejné, co Bětka. Poskládej alespoň 3 různé modely papírových vlašťovek a pokus se objektivně změřit vzdálenost, do níž doletí. Který model létá nejlépe?

Hrají roli nějaké vychytávky, které se u vlašťovek používají? Mohou jimi být ohnutí špiček křídel nahoru nebo drobné zatížení špičky. Vyber si jednu z vlašťovek, které jsi poskládal, a změř alespoň pro tři různé vychytávky, zda s nimi doletí dál.

Neboj se zapojit svou fantazii, ať už při výrobě vlašťovek nebo jejich vylepšování!

Doporučení: Dolet vlašťovky vždy měř raději několikrát, protože se může při různých hodech poměrně výrazně měnit.

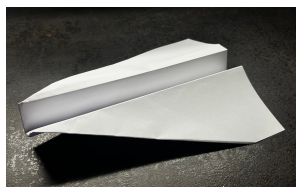
Teorie

Při popisu vlašťovek je můžeme přirovnat k reálným letadlům. Existuje mnoho různých způsobů, jak vlašťovku postavit, jaký jí dát tvar či jaké změny na ní provést, aby létala ještě lépe. Různé tvary křídel různě ovlivňují letecké vlastnosti, a proto se v tomto experimentu budeme snažit jednotlivé designy porovnat a zjistit, který létá nejlépe. Především je potřeba zaměřit se na tvar a velikost křídel, která jsou největším faktorem při samotném letu. Nicméně i další vlastnosti, jako je rozložení váhy či poloha křídel relativně k těžišti, jsou důležité.

Obdobně jako skutečná letadla i vlašťovky mohou mít různá vylepšení. Skutečná letadla například využívají klapky na křídlech pro kontrolu sklonu, změnu polohy palivových nádrží pro lepší rozložení váhy či tzv. *wingletů*, což jsou menší křídélka na konci hlavních křídel, jejichž úkolem je vytvářet vztlak a zvyšovat účinnost letadla narušením turbulentního proudění vznikajícího za špičkou křídel.

Měření

V našem měření jsme pozorovali celkem 3 různé vlašťovky, jejichž fotografie jsou na obrázcích 2, 3 a 4. Experiment byl prováděn v uzavřené místnosti. Každá vlašťovka byla hozena pod zhruba stejným úhlem a s využitím podobné síly. Délka doletu každé z vlašťovek byla měřena celkem 15krát a následně byl vypočítán aritmetický průměr a směrodatná odchylka aritmetického průměru pro danou vlašťovku.



Obrázek 2: Vlašťovka č. 1



Obrázek 3: Vlašťovka č. 2



Obrázek 4: Vlašťovka č. 3

Vidíme, že nejdále létala 2. vlašťovka – na ní jsme vyzkoušeli udělat 3 následující vylepšení: ohnutí konců křídel, vytvoření zářežů na konci vlašťovky a zatížení špičky kancelářskou sponkou.

Z naměřených dat vidíme, že první úprava (ohnutí konců křídel) napomohla k delšímu doletu, druhá (vytvoření zářežů na konci vlašťovky) dolet výrazně neovlivnila. Naopak přidáním závaží se délka doletu zásadně zmenšila a papírové letadélko mnohem dříve padalo k zemi.

n	$\frac{d_1}{\text{cm}}$	$\frac{d_2}{\text{cm}}$	$\frac{d_3}{\text{cm}}$
1.	392	421	526
2.	312	548	385
3.	282	544	568
4.	244	483	501
5.	259	438	572
6.	300	419	388
7.	323	473	408
8.	253	421	482
9.	312	592	408
10.	406	463	502
11.	322	586	431
12.	330	442	468
13.	286	573	419
14.	311	398	378
15.	394	461	402
průměr	315 ± 13	484 ± 13	456 ± 17

Tabulka 1: Dolet jednotlivých vlaštovek

n	$\frac{d_1}{\text{cm}}$	$\frac{d_2}{\text{cm}}$	$\frac{d_3}{\text{cm}}$
1.	502	421	263
2.	494	548	325
3.	456	544	375
4.	490	483	421
5.	596	438	296
6.	423	419	334
7.	467	473	317
8.	588	421	224
9.	497	592	285
10.	476	463	312
11.	471	586	328
12.	398	442	211
13.	523	573	385
14.	488	398	414
15.	475	461	297
průměr	490 ± 13	484 ± 17	319 ± 16

Tabulka 2: Dolet druhé vlaštovky po úpravách, úpravy jsou popořadě: ohnutí konců křídel, vytvoření zářezů na konci vlaštovky a zatížení špičky kancelářskou sponkou

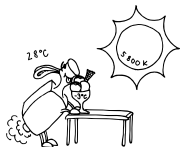
Diskuze

Z výsledků je více než patrné, že naše měření bylo velice nepřesné. Na nepřesnost měření má vliv hned několik faktorů. Není prakticky možné, aby byla vždy každá vlašťovka hozena stejně (může se lišit počáteční rychlost, kterou vlašťovku hodíme, úhel letu, či úchop při házení). Zároveň při každém dalším měření vlašťovka dopadá či naráží na zem, tím se lehce mění její tvar, což může mít také vliv na výsledky měření. Pokud bychom chtěli docílit přesnějších výsledků, museli bychom pro házení vlašťovek využít mechanických přístrojů, které zajistí stejné podmínky pro každý hod.

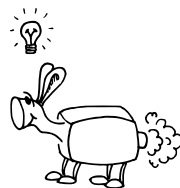
Závěr

Nejlépe létal nejmenší model vlašťovky s přidáním několika vychytávek – ohnutí křídel a vytvoření zárezů (zatížení špičky se nám jako vylepšení neosvědčilo). Naopak nejhůře létal model vlašťovky bez špičky.

Hedvika Kršková
hedvi@vyfuk.org



Řešení II. části prázdninové série



Úloha II.1 ... Prázdninový kvíz reloaded 10 bodů; průměr 6,03; řešilo 176 studentů

- Kolikrát se Měsíc v úplňku vejde za desetikorunu drženou nataženou rukou?
 - více než stokrát
 - přibližně šedesátkrát
 - přibližně desetkrát
 - právě jednou
- Ve srovnání s atmosférickým tlakem okolo kapky vody je tlak uvnitř kapky:
 - vyšší
 - stejný
 - nižší
 - v kapce vody není tlak
- Kolik souhvězdími prochází ekliptika?
 - 10
 - 11
 - 12
 - 13
- Výfuček stál uprostřed pole a z plných plic zakřičel. Jak daleko stál nejbližší panelový dům nedalekého sídliště, jestliže odraženou ozvěnu slyšel Výfuček čtvrt sekundy po výkřiku?
 - 17 m
 - 42,5 m
 - 85 m
 - 170 m
- Na kterém povrchu se budou čtvercová kola kutálet bez „drcání“?
 - na prvním
 - na druhém
 - na obou
 - na žádném z nich

kde d je průměr předmětu a r je vzdálenost od předmětu. Tento vztah plyne z představy, že fyzický průměr předmětů odpovídá části obvodu kružnice, která leží na sféře (tato představa funguje pouze tehdy, když je výsledný úhel α malý, což v našem případě platí, jak uvidíme za chvíli).

Musíme tedy zjistit průměry mince a Měsíce a odhadnout jejich vzdálenosti od naší hlavy, odkud zjistíme jejich úhlovou velikost. Podle toho, kolikrát větší bude úhlová velikost mince, tolikrát se zřejmě Měsíc za minci vejde. Měsíc je vzdálen od středu Země 384 tisíc kilometrů, my stojíme na povrchu, takže je jeho vzdálenost od nás jen přibližně 378 tisíc kilometrů a jeho průměr je 3 500 km. Průměr desetikoruny je přibližně 25 mm a vzdálenost mince od oka odhadneme jako délku natažené paže, což se pro běžného člověka pohybuje okolo 70 cm. Celkem tedy máme úhlový průměr Měsíce přibližně $0,5^\circ$ a pro minci 2° .

Měsíc má tedy 4krát menší úhlový průměr než mince. Pokud bychom chtěli určit, kolikrát se za minci vejde, tj. kolik Měsíců bychom u sebe mohli umístit, aby nebyly vidět, museli bychom přemýšlet o uspořádání. Jelikož nám stačí pouze přibližný počet, spokojíme se s odhadem. Měsíc i mince jsou kruhy, poměr jejich ploch je tedy roven druhé mocnině poměru jejich průměrů. Měsíc má potom 16krát menší plochu. V realitě bychom za minci 16 Měsíců nenaskládali, protože když vedle sebe umísťujeme kruhy, tak jsou mezi nimi mezery, tedy ve skutečnosti se jich tam vejde o něco méně.

Zároveň víme, že minimálně 4 Měsíce jsme schopni umístit v řadě vedle sebe, když má Měsíc 4krát menší průměr. Když uvážíme tyto dva hrubé odhady, tak vidíme, že nejlépe skutečnému počtu odpovídá možnost c.

2. Správná odpověď: a

Víme, že tlak, kterým působíme na povrch kapky, se přenese i dovnitř kapky. Toto tvrzení se obvykle označuje jako *Pascalův zákon*. Na kapku působí silou okolní vzduch, první příspěvek k tlaku uvnitř je tedy atmosferický tlak. Mimo něj však na kapku působí další tlak, který zajišťuje, že má voda právě tvar kapky. Je jím tlak způsobený povrchovým napětím vody. Povrchové napětí vzniká jako důsledek přitažlivých sil mezi molekulami vody. Tento tlak tedy tlačí molekuly vody, a proto se přičte k atmosférickému tlaku. Celkový tlak uvnitř kapky je tedy větší.

3. Správná odpověď: d

Ekliptika je kružnice na nebeské sféře, na které kdykoliv v průběhu roku najdeme Slunce. Prochází všemi souhvězdími zvěrokruhu, kterých je dvanáct. Ovšem nesmíme zapomenout na to, že kromě zvěrokruhu prochází navíc souhvězdím Hadonoše, který také patří mezi zvířetníková souhvězdí. Součástí tradičního zvěrokruhu však není.

4. Správná odpověď: b

Rychlost zvuku známe jako $343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Současně víme, jak dlouho trvalo, než se ozvěna dostala zpátky k Výfučkovi. Snadno tedy dopočítáme vzdálenost k panelovému domu. Nesmíme zapomenout vydělit výslednou dráhu dvěma, protože zvuk musel letět k domu i zpátky: $343 \cdot 0,25 / 2 = 42,5$ metrů.

5. Správná odpověď: a

V této úloze je klíčové, aby bylo těžiště našich čtvercových kol stále v jedné rovině. Kolo se poté nebude zastavovat a bude se plynule točit. Představíme-li si trajektorii těžiště

čtverce, který má délku strany stejnou, jako je délka jednoho oblouku na povrchu 1, pak se na něm bude pohybovat plynule. Těžiště bude mít stále ve stejné rovině. Výhodná je též kombinace rovné hrany čtvercového kola a kulaté dráhy (oproti trojúhelníkové dráze), díky které je pohyb kola plynulý. Na terénu 2 těžiště nebude stále v jedné rovině a při jízdě to tedy bude „drncat“.

6. Správná odpověď: d

Délka rovníku je 40 075 km. Jelikož má dospělý člověk přibližně 100 000 km cév, tak nám zbývá jen tato dvě čísla vydělit a získáme hodnotu 2,5krát.

7. Správná odpověď: b

Při řešení je důležité rozlišovat mezi pojmy *tíha* a *hmotnost*. Hmotnost je vlastnost, kterou má každé těleso nezávisle na tom, jestli se nachází na povrchu nějaké planety (čím větší hmotnost, tím těžší je změnit rychlost tělesa). Tíha na druhou stranu odpovídá tíhové síle, která působí na tělesa v gravitačním poli planet. Když tedy stoupneme na váhu, dojde ke změření naší tíhy a následnému přepočítání (ze znalosti tíhového zrychlení Země) na hmotnost.

Na různých planetách je gravitace různě silná. Na povrchu Země je tíhové zrychlení přibližně $9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, na Venuši $8,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ a na Neptunu $11,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ (pomineme to, že Neptun nemá pevný povrch).

Uvažme nyní, že náš obchodník koupí na Venuši tolik koření, že mu jeho váha ukáže 1 kg a on za něj zaplatí 200 Kč. Uvažujme, že váha je zkalibrována na tíhové zrychlení na Zemi (není to ale nutné, může být zkalibrována kdekoli, sami si rozmyslete proč), takže tíha koření je 9,8 N. Z tíhového zrychlení na Venuši zjistíme, že skutečná hmotnost koření je

$$m = \frac{9,8 \text{ N}}{8,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}} \doteq 1,1 \text{ kg}.$$

Poté přiletí na Neptun, kde bude tíhová síla působící nakoření rovna $1,1 \text{ kg} \cdot 11,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \doteq 12,3 \text{ N}$. Váha mu tedy ukáže:

$$m' = \frac{12,3 \text{ N}}{9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}} \doteq 1,25 \text{ kg}.$$

Na základě tohoto údaje pak koření prodá za přibližně 250 Kč a vydělá zhruba 50 Kč.

8. Správná odpověď: a

Planeta Venuše je specifická tím, že se kolem vlastní osy otáčí v opačném směru, než jak obíhá kolem Slunce. Jedná se o retrográdní rotaci, která je ve Sluneční soustavě jedinečná. Jedna otočka Venuši trvá 243 pozemských dnů. Díky tomu při obletu Slunce na Venuši slunce vychází a zapadá pouze dvakrát. Doteď je záhadou, jak retrográdní rotace vznikla.

9. Správná odpověď: a

Hubbleova konstanta skutečně není, na rozdíl od zbylých možností, konstantou. Jedná se pouze o veličinu, která určuje, jak rychle se v důsledku rozpínání vesmíru od sebe tělesa ve vesmíru vzdalují. Rychlost rozpínání se mění, proto se mění i hodnota Hubbleovy konstanty.

10. Správná odpověď: b

Teploty kvádrů se budou vyrovnávat dvakrát rychleji. Jelikož je výsledná velikost přeneseného tepla přímo úměrná průřezu i času, za který proces probíhá, a máme-li ve druhém případě tyče dvě, bude přenos procházet dvojnásobnou plochou. Výsledný čas tedy bude poloviční.

Anežka Čechová
anezka@vyfuk.org

Jiří Kohl
jirkak@vyfuk.org

Úloha II.2 ... Netypický hod mincí

10 bodů; průměr 4,83; řešilo 75 studentů

Aleš se jednoho letního dne vydal na výlet na nedaleký hrad, dokonce se i odhodlal vystoupat na jeho věž. Když si užíval krásný výhled, napadlo ho, za jak dlouho by asi na zem dopadla mince, kdyby ji z vrcholku věže pustil. Házet cokoliv z věže je ale samozřejmě přísně zakázáno, a tak to nemohl vyzkoušet. Pomozte Alešovi zodpovědět tuto otázku, aby si mohl nerušeně užívat vyhlídku. Předpokládejte, že věž je vysoká asi 50 m a Aleš z věže pouští jednu korunu. Započítejte i odpor vzduchu, který lze pro tuto situaci určit jako



$$F = \frac{1}{2} C_x \rho S v^2,$$

kde ρ je hustota vzduchu, v je rychlost pohybu mince, S je plocha kolmá na směr pohybu a C_x je tzv. činitel odporu, který se liší v závislosti na tvaru tělesa.

Nápověda: Dobu pádu se vám nejspíše nepodaří určit úplně přesně. Mohlo by se vám ji však podařit poměrně přesně odhadnout, pokud využijete třeba tabulkový procesor (např. Excel), v němž budete moct pohyb simulovat.

Zamysleme se nad složitostí celé situace. Když Aleš upustí minci z ruky, začne v důsledku působení tíhové síly padat směrem dolů zrychleným pohybem. Ve zrychlování ji naopak brzdí síla odporu vzduchu, která ovšem závisí na rychlosti! Konkrétně máme zadaný Newtonův vztah

$$F = \frac{1}{2} C_x \rho S v^2.$$

Odporová síla je tedy velmi malá, dokud mince padá pomalu. Postupem času však roste a začne pohyb mince ovlivňovat zásadním způsobem. Zrychlení mince se tedy v průběhu času mění a pro výpočet doby pádu nemůžeme použít žádné vzorečky známé ze základní školy.

Zapišeme si tedy celou situaci do rovnice. Z Newtonových zákonů víme, že výsledná síla působící na minci směrem dolů je rovna součinu zrychlení mince a její hmotnosti

$$ma = mg - \frac{1}{2} C_x \rho S v^2,$$

kde odporová síla má záporné znaménko, neboť působí opačným směrem než tíhová síla. Rovnici vydělíme hmotností a dostaneme

$$a = g - \frac{C_x \rho S}{2m} v^2.$$

Hodnoty parametrů

V rovnici pro a je určité konstantní tíhové zrychlení $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, hustota vzduchu $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (při teplotě 20°C) a hmotnost jedné koruny $m = 3,6 \text{ g}$. Okomentovali jsme, že se v průběhu pádu určité mění rychlost mince i její zrychlení. Pro nás zatím neznámým způsobem, to máme za úkol zjistit.

Překvapivě se do největších těžkostí dostáváme při určování odporového koeficientu C_x a plochy mince kolmé na směr pohybu S . Nevíme totiž vůbec nic o natočení mince. Vypočítat odporový koeficient libovolného tělesa je nesmírně komplikované, můžeme se však spokojit s tím, že si koeficienty najdeme na internetu. Například na Wikipedii⁶ se dozvíme, že pokud mince padá kruhovou podstavou směrem dolů (v této situaci je plocha S největší) i pokud padá válcovým pláštěm napřed (tehdy je S nejmenší) je koeficient přibližně roven $C_1 = 1,2$. Pro ostatní orientace již Wikipedie koeficienty neuvádí, na základě hodnot pro ostatní geometrické tvary však můžeme uvažovat, že bude blízký 1,2, tj. $C_2 \approx 1,2$.

Podobně spočítat plochu mince pro libovolnou orientaci je velmi obtížné. Alespoň pro hraniční případy máme největší plochu – plochu kruhu s poloměrem podstavy mince $r = 10 \text{ mm}$:

$$S_{\max} = \pi r^2 = 314 \text{ mm}^2.$$

Minimální plocha je, když mince padá otočená o 90° , pak je to plocha obdélníka se stranami $2r = 20 \text{ mm}$ a $h = 1,9 \text{ mm}$, což je výška mince. Odtud dostaneme

$$S_{\min} = 2rh = 38 \text{ mm}^2.$$

Pro ostatní orientace se pokusíme alespoň o přibližný vztah. Napřed uvážíme, jak se plocha podstavy mění v závislosti na úhlu otočení α (úhel normály k ploše vůči vertikálnímu směru)

$$S = S_{\max} \cdot |\cos \alpha| = \pi r^2 |\cos \alpha|,$$

vidíme, že tento vzorec určitě selhává, pokud je $S < S_{\min}$. Toto selhání se pokusíme zpětně opravit tím, že k S přičteme $S_{\min} \cdot |\sin \alpha|$, jinými slovy aproximujeme plášť mince obdélníkem. Tato aproximace bude fungovat dobře, pokud bude výška mince malá, což pro nás sedí. Celkem tedy máme

$$S_\alpha \approx \pi r^2 |\cos \alpha| + 2rh |\sin \alpha|.$$

Úvahy o řešení

Ještě než se pustíme do řešení naší pohybové rovnice

$$a = g - \frac{C_x \rho S}{2m} v^2,$$

je dobré se zamyslet, co od výsledku očekávat a případně jak si situaci zjednodušit. Z rovnice například vidíme, že $a < g$ pro $v \neq 0$, tedy doba pádu mince bude určitě delší, než pokud bychom odpor zanedbali. Při zanedbání odporu dostaneme

$$s = \frac{1}{2} g t_0^2 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{2s}{g}} \doteq 3,2 \text{ s},$$

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient

kde $s = 50$ m je výška věže. Doba $t_0 = 3,2$ s je tedy jakýsi dolní odhad. Pokud by nám při dalších výpočtech někdy vyšla kratší doba pádu, tak rovnou víme, že jsme něco udělali špatně.

Jak moc je t_0 vzdálené od skutečné doby pádu? Když upravíme odporový člen

$$\text{odpor} = \frac{C_x \rho S}{2m} v^2 = \frac{C_x \rho S}{2\rho_{\text{tělesa}} V} v^2,$$

tak vidíme, že odpor má slabší účinky na tělesa s vysokou hustotou. Pokud bychom porovnali například minci a padající list ze stromu, tak mince spadne určitě mnohem rychleji. Při malých rychlostech – a tedy při krátké době pádu – je pro velmi hustá tělesa vliv odporu slabý. Vzhledem k tomu, že mince má poměrně vysokou hustotu a pád není příliš dlouhý, můžeme dobu $t_0 = 3,2$ s považovat za přibližné řešení naší úlohy.

Pojďme se přesto pokusit o přesnější řešení. Z předchozího odstavce víme, že pokud se mince neotáčí a zároveň padá buď s podstavou kolmo na směr pohybu, nebo s podstavou podél směru pohybu, tak známe všechny potřebné parametry. Zbývá jen nalézt řešení pohybové rovnice.

Je však to, že se mince neotáčí, opodstatněný předpoklad? Mince je vhodným způsobem symetrická. Pokud padá s libovolnou orientací, tak je geometrický střed její plochy při pohledu zdola umístěný v těžišti. To znamená, že odporová síla nevytváří žádný moment síly a minci nijak neroztáčí (toto pochopitelně platí jen dokud platí Newtonův, případně Stokesův vztah pro odpor, obecně je působení vzduchu na pohybující se tělesa velmi komplikovanou záležitostí). Tento fakt si můžete sami vyzkoušet, když minci na začátku velmi opatrně pustíte tak, že se nebude otáčet, pak se při pádu neroztočí. Řešení, které nalezneme pro tyto předpoklady, tedy budeme považovat za dostatečně přesné ve speciálních případech.

Jediný problém je, že dosáhnout toho, aby se mince při puštění z věže neroztočila, jde jen velmi těžko. Uvědomme si, že dvě zmíněná řešení pro předpoklad neotáčející se mince jsou vlastně řešení pro minimální a maximální odpor. Pokud mince padá podstavou napřed, je plocha S největší, a tedy i odpor největší. A když je podstava při pádu natočena svisle, je odpor naopak nejmenší. Nalezením dob pádu pro tyto dvě varianty tedy dostaneme horní i dolní odhad pro minci padající libovolným způsobem! Skutečná doba pádu mince pak bude vždy ležet v intervalu $\langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$.

Úlohu se pokusíme ještě vyřešit i za předpokladu, kdy se mince otáčí konstantní úhlovou rychlostí. Pro tento případ jsme v předchozí sekci našli přibližné vztahy pro odporový koeficient $C_2 \approx 1,2$ a kolmou plochu $S_\alpha = \pi r^2 |\cos \alpha| + 2rh |\sin \alpha|$, kde $\alpha = 2\pi f t$, přičemž f je frekvence otáčení mince. Při řešení za těchto předpokladů si musíme dát pozor na tři věci. Zaprvé je nyní pohybová rovnice ještě komplikovanější. Zadruhé ve skutečnosti vůbec nevíme, jestli Newtonův vztah pro odpor platí i pro otáčející se tělesa. Minimálně pro pomalu otáčející se minci to však zjevně lze uvažovat. A zatřetí, vztahy pro C_2 i S_α jsou pouze přibližné. Na nalezené řešení je tedy třeba pohlížet s „větší rezervou“ než na ostatní řešení.

Řešení úlohy

Budeme hledat řešení pro tři různé situace: pro minimální odpor, pro maximální odpor a přibližné řešení pro otáčející se minci. Ve všech případech je to stejná rovnice

$$a = g - \frac{C_x \rho S}{2m} v^2,$$

liší se pouze hodnoty některých parametrů. Ty, které jsou nezávislé na předpokladech, jsou uvedeny v tabulce 3, a parametry, které závisí na konkrétním řešení, jsou v tabulce 4.

g	ρ	m	r	h
$9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	$1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	3,6 g	10 mm	1,9 mm

Tabulka 3: Konstantní parametry

	C_x	S
Minimální odpor	1,2	$2rh$
Maximální odpor	1,2	πr^2
Řešení s otáčením	$\approx 1,2$	$\approx \pi r^2 \cos(2\pi ft) + 2rh \sin(2\pi ft) $

Tabulka 4: Proměnné parametry

Nyní již máme vše nachystané, abychom mohli nalézt dobu pádu. Chceme zjistit, jak se vyvíjí poloha mince y v závislosti na čase t , když v čase $t = 0 \text{ s}$ je mince ve výšce 50 m a rychlost mince je $v(0) = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Alespoň pro případy bez otáčení lze najít explicitní vzoreček pro polohu mince v libovolném čase $y(t)$. To však vyžaduje velmi pokročilé znalosti matematiky, proto se mu vyhneme. Místo toho si vezmeme na pomoc počítač. Jinými slovy, nalezneme přibližné *numerické řešení*.

Jak takové řešení hledat? Představme si, že přesně známe rychlost nějaké částice v každém okamžiku a chceme spočítat, jakou částice urazila dráhu. Víme, že pokud by rychlost byla konstantní, tak je dráha $s = vt$. Pokud se rychlost mění nějakým komplikovaným způsobem, tak máme problém, vždy se však můžeme pokusit tu dráhu odhadnout.

Jak na to? Představme si, že na začátku pohybu má částice rychlost například $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, která se v průběhu času mění. Pokud se však nemění moc rychle, například když se po jedné sekundě změní jen o $0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, tak můžeme uraženou dráhu odhadnout tak, že prostě řekneme, že se po dobu oné jedné sekundy pohybovala konstantními $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a v druhé sekundě už budeme uvažovat $10,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ atd. Tímto způsobem získáme jednoduchý odhad uražené dráhy. Odhad bude tím přesnější, čím kratší intervaly zvolíme. Například pokud bychom zvolili tisícinu sekundy, tak se už rychlost změní jen velmi málo a máme přesnější výsledek.

Jediný problém s touto metodou je, že musíme provést velké množství matematických výpočtů (metoda je totiž tím přesnější, čím více výpočtů provedeme). A zde nám právě přichází na pomoc počítač. Pokud by měl člověk jen s pomocí kalkulačky provést například milion výpočtů, trvalo by mu to velmi dlouho, počítač to však zvládne ve zlomku sekundy.

Dodejme, že popsaná numerická metoda je ta nejjednodušší možná a zároveň i nejméně přesná. Existují i mnohem přesnější, za kterými je ovšem pochopitelně schovaná komplikovanější matematická teorie než ta, kterou jsme zde popsali v jednom odstavci.

Dále si uvědomme, že v naší úloze je situace poněkud komplikovanější. Neznáme totiž rychlost částice v libovolný okamžik, máme však vzoreček, kterým zvládneme spočítat zrychlení, pokud známe rychlost. Aplikujeme tedy naši úvahu jak na uraženou dráhu, tak na velikost rychlosti. Tedy vždy během krátkého intervalu (například tisíciny sekundy) budeme uvažovat, že je rychlost konstantní a spočítáme dráhu. Zároveň také budeme uvažovat, že je zrychlení konstantní, a spočítáme změnu rychlosti⁷. Takto budeme postupovat, dokud celková dráha

⁷Zde bychom postup mohli zpřesnit například tak, že bychom pohyb během krátkého okamžiku považovali za rovnoměrné zrychlení, celá úloha je však už i tak dost komplikovaná, takže se tomu vyhneme.

nedosáhne 50 m (výška věže). Pak se jen podíváme na čas a jsme hotovi.

Pojďme celý postup matematizovat. Čas si rozdělíme na intervaly Δt , například $\Delta t = 0,001$ s a intervaly očíslovíme přirozenými čísly n . Pokud bude tedy čas například $n = 100$, tak bude celková uplynulá doba 0,1 s. V čase $n = 0$ známe polohu i rychlost

$$\begin{aligned}y(t = 0) &= y_0 = 0 \text{ m} \\v(t = 0) &= v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.\end{aligned}$$

A zrychlení spočítáme z pohybové rovnice

$$a_0 = g - \frac{C_x \rho S}{2m} v_0^2,$$

tedy $a_0 = g$. Uražená dráha i rychlost v čase $n = 1$ potom podle předchozích úvah bude

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + v_0 \cdot \Delta t \\v_1 &= v_0 + a_0 \cdot \Delta t,\end{aligned}$$

a zrychlení a_1 opět dopočítáme z pohybové rovnice atd. Uvažujme napřed řešení bez otáčení, pak jsou C_x i S konstantní. Pro tento případ zvládneme jednoduše napsat rovnice pro výpočet polohy i rychlosti v čase $n + 1$ ze znalosti y_n , v_n a a_n . Zrychlení a_{n+1} dopočítáme po výpočtu rychlosti v_{n+1} .

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + v_n \cdot \Delta t \\v_{n+1} &= v_n + a_n \cdot \Delta t \\a_{n+1} &= g - \frac{C_1 \rho S_{\min, \max}}{2m} v_{n+1}^2.\end{aligned}$$

Pro případ s otáčející se mincí musíme vzít v úvahu, že se plocha S mění v čase jako

$$S(t) = \pi r^2 |\cos(2\pi f t)| + 2rh |\sin(2\pi f t)|,$$

odkud máme

$$S_{n+1} = \pi r^2 |\cos(2\pi f t_{n+1})| + 2rh |\sin(2\pi f t_{n+1})|.$$

Celkem pak pro otáčející se minci dostaneme

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + v_n \cdot \Delta t \\v_{n+1} &= v_n + a_n \cdot \Delta t \\a_{n+1} &= g - \frac{C_2 \rho}{2m} v_{n+1}^2 \cdot (\pi r^2 |\cos(2\pi f t_{n+1})| + 2rh |\sin(2\pi f t_{n+1})|).\end{aligned}$$

Řešení pomocí Excelu

Rovnice odvozené v předchozím odstavci jsou v ideálním tvaru, aby šly výpočty provádět v Excelu. Popíšeme nyní, jak si Excel nastavit, aby provedl všechny výpočty „za nás“. Podrobně se budeme zabývat případem maximálního odporu. Popsaný postup půjde s menšími modifikacemi aplikovat i na zbylé možnosti.

Zvolíme si například, že sloupceky A, B, C, D budou pro čas, polohu, rychlost a zrychlení. Začneme tím, že vyplníme první řádek, který odpovídá času $t = 0$, jsou to tedy tzv. *počáteční*

podmínky. Máme $A1 = B1 = C1 = 0$ a $D1 = 9,8$. Poté musíme Excelu říci, jak vyplnit druhý řádek. V duchu předchozích rovnic dostaneme

$$A2 = A1 + 0,001$$

$$B2 = B1 + C1 \cdot 0,001$$

$$C2 = C1 + D1 \cdot 0,001.$$

Pro výpočet zrychlení bychom si mohli jednotlivé parametry z tabulek 3 a 4 napsat do buněk v Excelu. Pro rychlejší výpočty je však výhodnější si hned na začátku vypočítat koeficient před v_n^2 číselně

$$\frac{C_1 \rho S_{\max}}{2m} = 0,0628,$$

číselný výsledek je pochopitelně v základních jednotkách. Vzorec pro $D2$ pak je

$$D2 = 9,8 - 0,0628 \cdot C2^2.$$

Jediné, co nyní zbývá, je označit první čtyři buňky v druhém řádku a myši táhnout dolů. Excel pak začne automaticky vyplňovat všechny řádky pomocí stejných rovnic a tím pádem nám dopočítávat polohu, rychlost a zrychlení v pozdějších časech. Když myši dojedeme až k řádku číslo 5000, tak zjistíme, že dráha už přesáhla 50 m. Musíme se tedy vrátit nahoru a najít buňku, ve které je poloha nejbližší 50 m, což je buňka s číslem B4887. Máme tedy, že pro případ maximálního odporu bude pád mince trvat přibližně $t_1 = 4,9$ s.

Pro případ s minimálním odporem musíme vzorec pro $D2$ změnit na:

$$D2 = 9,8 - 0,0076 \cdot C2^2.$$

Aplikováním této změny dostaneme, že 50 m urazí mince za dobu $t_2 = 3,6$ s. No a pro případ mince, která se otáčí například frekvencí $f = 1$ Hz máme

$$D2 = 9,8 - 0,0628 \cdot C2^2 \cdot \text{ABS}(\text{COS}(2 \cdot \text{PI}() \cdot 1 \cdot A2)) - \\ - 0,0076 \cdot C2^2 \cdot \text{ABS}(\text{SIN}(2 \cdot \text{PI}() \cdot 1 \cdot A2)).$$

Odkud nalezneme dobu $t_3 = 4,6$ s pro frekvenci 1 Hz. Když zkusíme frekvenci změnit například na 2 Hz, nebo 0,5 Hz, dostaneme pořád přibližně stejný výsledek.

Přesnější metody a komentáře

Provedli jsme několik numerických výpočtů pomocí Excelu, výsledky jsou uvedeny v tabulce 5. Všimněme si, že jsme tentokrát hodnoty nezaokrouhlili, to bude mít význam za chvíli, při porovnávání přesnosti výpočtů. Fyzikální význam pro nás mají hodnoty zaokrouhlené na 2 platné číslice, protože se stejnou přesností jsme znali parametry úlohy (hmotnost mince, odporový koeficient atd.).

Jak bylo zmíněno, použitá numerická metoda je v porovnání s některými jinými poměrně nepřesná a časový krok $\Delta t = 0,001$ s je stále poměrně velký. Proto byly pro zajímavost ještě všechny výpočty provedeny s pomocí programovacího jazyka Python. Python má v knihovně *scipy* předprogramované velmi sofistikované numerické metody na řešení tohoto typu rovnic. Výsledky, které nám vrátí, tedy můžeme považovat za velmi přesné.

	Doba pádu Excel	Doba pádu Python
Minimální odpor	3,400 s	3,400 s
Maximální odpor	4,886 s	4,885 s
Otáčení s frekvencí 0,2 Hz	4,347 s	4,346 s
Otáčení s frekvencí 1 Hz	4,420 s	4,420 s
Otáčení s frekvencí 5 Hz	4,423 s	4,423 s
Zanedbání odporu	3,194 s	

Tabulka 5: Výsledky výpočtů a simulací

Doby pádu vypočítané pomocí Pythonu jsou uvedeny pro srovnání rovněž v tabulce 5. Všimněme si, že se výsledky prakticky neliší od těch, které nám vrátil Excel. Je to proto, že naše rovnice je stále poměrně jednoduchá, a řešení se chová stabilně. Zrychlení se totiž moc rychle nemění a navíc závisí pouze na rychlosti, ne na poloze. Pokud bychom chtěli například počítat pohyb planety kolem Slunce, kde síla závisí na vzdálenosti od Slunce, tak by nepřesnosti byly větší.

Okomentujme ještě naše výsledky. Vidíme, že řešení s minimálním odporem, kdy mince padá s podstavou rovnoběžně se směrem pohybu, se od výpočtu bez odporu liší jen velmi málo. Naopak při pohybu s maximálním odporem padá skoro o polovinu déle. Doba pádu tedy už při výšce 50 m velmi závisí na orientaci mince. Zároveň pro tato dvě řešení známe všechny parametry poměrně přesně a Newtonův odporový vzorec určitě funguje. Víme tedy, že skutečná doba pádu mince bude s velkou pravděpodobností ležet v intervalu (3,4 s, 4,9 s).

Dále jsme našli i přibližné řešení pro otáčející se minci. Zde jsme se pokusili odůvodnit, že díky symetrii se bude mince otáčet s přibližně konstantní frekvencí, odhadli jsme hodnotu odporového koeficientu a velikost průřezu mince kolmého na směr pohybu. Předpokládali jsme, že Newtonův vztah stále platí. Zjistili jsme, že doba pádu za těchto předpokladů závisí na frekvenci otáčení mince jen velmi málo. To pravděpodobně plyne z toho, že doba pádu mince závisí především na tom, jak dlouho je natočena určitým směrem (tj. jestli déle padá s odporem blízkým k maximálnímu, nebo k minimálnímu). Pro dostatečně vysokou frekvenci otáčení však bude zanedbatelné to, že mince skončí jinak natočená než na počátku. Čas, který mince stráví natočena do různých směrů, tak nebude zcela stejný. V důsledku tohoto již poté další zvyšování frekvence nebude mít příliš velký vliv na dobu pádu.

Zjistili jsme, že doba pádu mince otáčející se rychlostí mezi jednou otáčkou za 5 s po 5 otáček za sekundu bude s největší pravděpodobností rovna přibližně 4,4 s. Tento rozsah frekvencí dobře pokrývá možné rychlosti rotace volně puštěné mince, můžeme tedy 4,4 s prohlásit za nejlepší odhad doby pádu jednorozměrné mince z 50 metrové věže. Nyní už nám pouze zbývá najít vhodnou věž, vylézt na ni a naše výsledky experimentálně ověřit.

Jiří Kohl
jirkak@vyfuk.org

Úloha II.3 ... Ledové experimenty

10 bodů; průměr 6,58; řešilo 120 studentů

Julča má v létě moc ráda míchané drinky, především dobře vychlazené ledem. Kostky ledu ale nemusí fyzikům sloužit jen ke chlazení nápojů, ale také pro „cool“ experimenty. Pojďme si některé vyzkoušet. Popište svá pozorování a odpovězte na zadané otázky.



1. Připravíme si dvě sklenice a kostky ledu. Do každé sklenice dáme kostku ledu. Jednu z nich zasypeme třemi lžicemi soli. Která kostka ledu taje rychleji? Proč se to tak děje?
2. Do nové sklenice dáme ledovou kostku, položíme na ni tenký provázek (např. bavlnku) namočený ve vodě a posypeme po jeho délce solí. Počkáme 10 vteřin a poté zkusíme kostku pomocí provázku zvednout. Co pozorujeme a jak k tomu došlo?

Upozornění: Kostky ledu, zvláště po posypání solí, mohou být na dotek velmi studené, tudíž není vhodné s nimi manipulovat holýma rukama.

Teorie

Led je pevným skupenstvím vody a vzniká běžně při teplotě 0°C (teplota tání ledu). Pokud do něj přidáme jiné látky, může se teplota tání snížit a led začíná tát při nižší teplotě (mezi tyto látky řadíme např. líh, kuchyňskou sůl aj.). V našem experimentu se zabýváme tím, jak tání ledu ovlivňuje právě sůl.

Měření

V první části experimentu jsme si připravili 2 zhruba stejné ledové kostky (obě mají objem 30 ml) a každou z nich vložili do vlastní sklenice. Jednu z kostek jsme nechali volně na vzduchu, druhou jsme zasypali asi 3 lžicemi soli a měřili jsme čas, za který led kompletně roztaje – každé měření probíhalo 5krát, při pokojové teplotě 22°C .

	t_1 (bez soli)	t_2 (se solí)
1.	28 min 24 s	13 min 35 s
2.	29 min 13 s	12 min 58 s
3.	28 min 38 s	12 min 55 s
4.	27 min 52 s	14 min 24 s
5.	27 min 47 s	13 min 12 s
průměr	28 min 23 s	13 min 25 s

Tabulka 6: doba tání ledu

Z naměřených hodnot vidíme, že led zasypaný solí roztál (oproti samotnému ledu) polovičním čase. Jak již bylo výše zmíněno, kuchyňská sůl je jednou z látek, které snižují teplotu tání – v závislosti na koncentraci až na -21°C . Tohoto jevu se v praxi využívá např. při posypu silnic a chodníků v zimě – naruší se struktura ledu a začne tát i při teplotách pod nulou.

Při tomto experimentu záleží hned na několika faktorech – velikosti ledu, jeho počáteční teplotě, okolní teplotě prostředí, množství použité soli atd. Proto je nutné dbát na alespoň podobné podmínky.



Obrázek 6: Stav ledu na začátku experimentu



Obrázek 7: Stále tající neposolený led (vlevo) a roztátý posolený led (vpravo)

Ve druhé části experimentu jsme si opět připravili led, sůl a dále tenkou nit, kterou jsme předem důkladně namočili ve vodě. Nit jsme přiložili na ledovou kostku a po její délce ji lehce zasypali solí. Následně se nám podařilo nit i s ledem zvednout do vzduchu, viz obr. 8.

Jak jsme zjistili v první části, sůl snižuje teplotu tání ledu – díky tomuto jevu led okolo posolené nitě rozmrzne. Okolní teplota studeného ledu způsobí to, že voda v niti opět zamrzne a provázek zůstane přimrzlý ke kostce ledu.

Tento experiment je poměrně náročný na provedení (a nejspíše budete potřebovat několik pokusů, než se vám povede ledovou kostku pomocí provázku zvednout). Je nutné použít minimum soli a nasypat ji pouze po délce nitky (jinak dojde k tomu, že led začne tát celý a znovu už nezmrzne). Záleží i na výběru provázku a velikosti ledové kostky – menší se nám bude zvedat značně jednodušeji.



Obrázek 8: Led zvednutý přimrznutým provázkem

Závěr

Zjistili jsme, že rychleji taje led zasypaný solí, protože kuchyňská sůl snižuje teplotu tání ledu. Zároveň se nám podařilo zvednout kostku ledu pomocí provázku za využití soli, jíž jsme led nejdříve rozpustili, a následně nechali provázek přimrznout.

Hedvika Kršková

hedvi@vyfuk.org



Konečné pořadí řešitelů prázdninové série

Kompletní výsledky najdete na <https://vyfuk.org>.

Kategorie šestých ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	I 30	II 30	Σ 60
1. Vladimír Kotsch	Gymnázium Sázavská Praha 2	28	26	54
2. Vít Dobiáš	G, Havlíčkův Brod	25	23	48
3. Lukáš Kudláček	ZŠ a MŠ T. G. Masaryka Drásov	20	22	42
4. Lukáš Laštovička	G Neumannova, Žďár n. S.	23	17	40
5. Antonín Vácha	ZŠ Chrudim 3	24	14	38
6.–7. Kristýna Rybková	ZŠ Úvoz, Brno	21	16	37
6.–7. Roman Verbiy	ZŠ Truhlářská, Karlovy Vary	21	16	37
8. Antonín Bartoš	ZŠ Metelkovo nám., Teplice	26	9	35
9.–12. Richard Frolík	G prof. J. Patočky, Praha	10	24	34
9.–12. Lukáš Kopecký	G, Litomyšl	18	16	34
9.–12. Richard Menšík	ZŠ Boskovice	16	18	34
9.–12. Anastázie Seinerová	ZŠ Pardubice - Studánka	21	13	34
13. Emilie Kimmerová	ZŠ a MŠ Kotlářská, Brno	22	11	33
14. Marek Nosek	ZŠ Stupkova, Olomouc	19	13	32
15. David Kříž	G P. de Coubertina, Tábor	15	16	31
16.–18. Melinka Čejpová	Arcibiskupské G, Praha	18	12	30
16.–18. Martina Mrázová	ZŠ Palachova, Brandýs nad Labem	9	21	30
16.–18. Matěj Vacek	ZŠ T. G. M. Lomnice nad Popelkou	15	15	30
19.–20. Artemis Hašková	Nový PORG, Praha	17	12	29
19.–20. Matěj Žárský	ZŠ Prodloužená, Pardubice	15	14	29
21. Jan Foldyna	Anglofonní základní škola, z. ú.	21	7	28
22.–23. Jan Karafiát	ZŠ Třebelchovice pod Orebem	14	13	27
22.–23. Elen Kršková	ZŠ Dolní Věstonice	16	11	27
24.–27. Jindřich Junek	ZŠ Praha 9 - Satalice	11	15	26
24.–27. Zuzana Koplíková	ZŠ Vejrostova, Brno	15	11	26
24.–27. Thao Ngo Phuong	G, Kadaň	9	17	26
24.–27. Eva Pospíchalová	ZŠ Buttulova, Chotěboř	12	14	26
28.–32. Patrik Adler	G, Cheb	13	12	25
28.–32. Dominika Jakubková	ZŠ a MŠ T. G. Masaryka Drásov	14	11	25
28.–32. Dominik Mikula	ZŠ a MŠ Vedlejší, Brno	13	12	25
28.–32. Tomas Pihrt	ZŠ Akad. Heyrovského, Chomutov	12	13	25

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	I 30	II 30	Σ 60
28.–32. <i>Valentýna Sochorová</i>	G, Olomouc-Hejčín	25	–	25
33.–37. <i>Milan Fiala</i>	G, Trutnov	19	5	24
33.–37. <i>Martin Palarčík</i>	ZŠ Josefa Ressla, Pardubice	17	7	24
33.–37. <i>Lada Prinzová</i>	Gymnázium a OA Mariánské Lázně	15	9	24
33.–37. <i>Oliver Slavíček</i>	G, Cheb	12	12	24
33.–37. <i>Tomáš Tajbr</i>	ZŠ ul. Kpt. Jaroše, Třebíč	11	13	24
38.–39. <i>Josef Cacek</i>	1. ZŠ TGM Milevsko	–	23	23
38.–39. <i>Marek Tóth</i>	ZŠ Komenského, Ústí nad Orlicí	11	12	23
40.–41. <i>Petr Spěšný</i>	ZŠ Bakalovo nábreží, Brno	22	–	22
40.–41. <i>Jiří Žák</i>	ZŠ Třebechovice pod Orebem	12	10	22
42.–43. <i>Karel Šmíd</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	21	–	21
42.–43. <i>Lada Vyslouzilová</i>	ZŠ Verdunská, Teplice	13	8	21
44.–47. <i>Barbora Hodovancová</i>	Gymnázium Brno-Bystrc	8	12	20
44.–47. <i>Elena Hruběšová</i>	ZŠ a MŠ Husova, Brno	7	13	20
44.–47. <i>Kateřina Jiříčková</i>	ZŠ Slovanské nám., Brno	10	10	20
44.–47. <i>Jan Vysoký</i>	G, Litomyšl	10	10	20
48. <i>Eva Bayerová</i>	ZŠ Brno, Sirotkova 36	12	6	18
49.–51. <i>Vanda Blažková</i>	G P. de Coubertina, Tábor	17	–	17
49.–51. <i>Jan František Lukáš</i>	ZŠ Dr. Miroslava Tyrše Hrdějovic	–	17	17
49.–51. <i>Emma Smetanová</i>	G, Litomyšl	9	8	17
52.–53. <i>Anna Marie Stachová</i>	ZŠ Mendelova, Praha 4 - Jižní Mě	11	5	16
52.–53. <i>Gabriel Peterka</i>	ZŠ Oskara Nedbala, České Budějov	9	7	16
54.–60. <i>Jana Hejtmánková</i>	ZŠ ul. Kpt. Jaroše, Třebíč	15	–	15
54.–60. <i>Ann Kratochvílová</i>	ZŠ Filosofská, Praha 4 - Braník	8	7	15
54.–60. <i>Kateřina Pitorová</i>	ZŠ a MŠ Úprkova, Hradec Králové	10	5	15
54.–60. <i>Filip Říčan</i>	ZŠ Vratislavova, Praha 2	12	3	15
54.–60. <i>Tadeáš Schejbal</i>	ZŠ Liberec 8	15	–	15
54.–60. <i>Vsevolod Vasyliukov</i>	ZŠ a MŠ nám. Jiřího z Poděbrad,	15	–	15
54.–60. <i>Tomáš Zdechovský</i>	ZŠ a MŠ Josefa Gočára Hradec Krá	8	7	15
61.–64. <i>Zuzana Krásová</i>	ZŠ Verdunská, Teplice	7	7	14
61.–64. <i>Alice Mrkvičková</i>	ZŠ Novoborská, Praha 9	14	–	14
61.–64. <i>Petr Novotný</i>	ZŠ a MŠ Radostín nad Oslavou	9	5	14
61.–64. <i>Pavel Wildumetz</i>	G, Kadaň	8	6	14
65.–70. <i>Viktorie Blahová</i>	ZŠ a MŠ Praha 4 - Chodov	8	5	13
65.–70. <i>David Allan Kusý</i>	ZŠ a MŠ nám. Jiřího z Lobkovic,	13	–	13
65.–70. <i>Hana Malinová</i>	ZŠ Boženy Němcové, Zábřeh	8	5	13
65.–70. <i>Michael Prášek</i>	2. ZŠ JAK Milevsko	–	13	13
65.–70. <i>Christina Yakunina</i>	Nový PORG, Praha	6	7	13
65.–70. <i>Andrea Zimáčková</i>	ZŠ Velká Dlážka, Přerov, Přerov	13	–	13
71.–73. <i>Lukáš Kába</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	7	5	12
71.–73. <i>Alice Kolíková</i>	Cytilometodějské G, Prostějov	12	–	12
71.–73. <i>Oliver Slavíček</i>	G, Cheb	7	5	12
74.–75. <i>Jaroslav Hanslík</i>	ZŠ a MŠ T. G. Masaryka Černilov	7	4	11
74.–75. <i>Barbora Komárková</i>	ZŠ a MŠ Svitavy - Předměstí	8	3	11
76.–80. <i>Benjamin Maldonado</i>	ZŠ nám. Jiřího z Poděbrad, Praha	5	5	10
76.–80. <i>Rozálie Pešáková</i>	ZŠ Velká Dlážka, Přerov, Přerov	7	3	10
76.–80. <i>Metoděj Šámal</i>	ZŠ ul. 5. května, Liberec 1	10	–	10
76.–80. <i>Adéla Vaněčková</i>	ZŠ Burešova, Praha 8 - Kobylisy	10	–	10
76.–80. <i>Malvína Vintrová</i>	ZŠ Praha 4 - Chodov	10	–	10
81.–91. <i>Ondřej Častorál</i>	ZŠ Dr. Edvarda Beneše Praha 9 -	9	–	9
81.–91. <i>Vojtěch Lubomír Doležal</i>	ZŠ Švermova, Žďár nad Sázavou	9	–	9

Kategorie sedmých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	I 30	II 30	Σ 60
1. <i>Oleg Šatánek</i>	Střední škola Hradec Králové	29	27	56
2. <i>Kryštof Vítek</i>	ZŠ Seifertova, Jihlava	26	28	54
3. <i>Matěj Krivánek</i>	ZŠ T. G. M. Mor. Budějovice	26	26	52
4. <i>Matěj Dudek</i>	ZŠ Pardubice – Polabiny	24	24	48
5. <i>Tadeáš Smička</i>	ZŠ Dr. Hrubého, Šternberk	19	27	46
6.–7. <i>Michaela Bližňáková</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	25	19	44
6.–7. <i>Jakub Vávra</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	19	25	44
8. <i>Isabela Hořavová</i>	Lauderova MŠ, ZŠ a G p Praha 2	22	13	35
9.–11. <i>Tereza Březovská</i>	G Dobruška	19	15	34
9.–11. <i>Iva Němcová</i>	ZŠ Pardubice - Dubina	18	16	34
9.–11. <i>Denis Tichý</i>	ZŠ T. G. Masaryka Přelouč	19	15	34
12. <i>Květa Bouchalová</i>	G, Olomouc-Hejčín	25	7	32
13. <i>Ondřej Laštovička</i>	G Neumannova, Ždár n. S.	15	14	29
14.–15. <i>Martina Merglová</i>	G a OA, Vrchlabí	28	–	28
14.–15. <i>Klára Valentová</i>	ZŠ Hálkova, Olomouc	10	18	28
16. <i>Ondřej Seidl</i>	ZŠ Hálkova, Olomouc	15	12	27
17. <i>Anna Kolmanová</i>	ZŠ a MŠ Jilemnice	17	7	24
18. <i>Jan Štábl</i>	ZŠ Bratří Čapků, Ústí nad Orlicí	10	13	23
19. <i>Šimon Hák</i>	G a SOŠ, Jilemnice	9	13	22
20.–22. <i>Matěj Ondrušek</i>	ZŠ Horácké náměstí, Brno	–	21	21
20.–22. <i>Daniel Stražil</i>	G Christiana Dopplera, Praha	7	14	21
20.–22. <i>Karolína Vychodilová</i>	ZŠ Heyrovského, Olomouc	7	14	21
23.–26. <i>Jonáš Bayer</i>	ZŠ Ostrava - Vítkovice	13	7	20
23.–26. <i>Eliška Bayerova</i>	ZŠ Ostrava - Vítkovice	13	7	20
23.–26. <i>Hana Bayerová</i>	ZŠ Brno, Sirotkova 36	13	7	20
23.–26. <i>Klára Němcová</i>	G J. Wolker, Prostějov	16	4	20
27.–29. <i>Adam Houdek</i>	ZŠ a MŠ , Březová	–	19	19
27.–29. <i>Matyáš Churavý</i>	EKO G, Brno	7	12	19
27.–29. <i>Mikuláš Prinz</i>	Gymnázium a OA Mariánské Lázně	19	–	19
30.–31. <i>Štěpán Peteráč</i>	ZŠ Schulz. sady, Dvůr Králové	9	8	17
30.–31. <i>Johana Váňová</i>	Lauderova MŠ, ZŠ a G p Praha 2	17	–	17
32.–34. <i>Viktorie Brychtová</i>	ZŠ Horní Černá	10	6	16
32.–34. <i>Patrik Peroutka</i>	G Lučka Pika, Plzeň	11	5	16
32.–34. <i>Natálie Srchová</i>	ZŠ tř. SNP, Hradec Králové	9	7	16
35.–36. <i>František Brychta</i>	G Dašická, Pardubice	8	7	15
35.–36. <i>Tadeáš Grosser</i>	První české G, Karlovy Vary	–	15	15
37.–40. <i>Maya Bartošová</i>	G Dašická, Pardubice	–	14	14
37.–40. <i>Magdalena Čejpová</i>	Arcibiskupské G, Praha	9	5	14
37.–40. <i>Bartoloměj Stoklásek</i>	ZŠ Troubelice	9	5	14
37.–40. <i>Antonín Šreiber</i>	ZŠ Skálova, Turnov	8	6	14
41.–42. <i>Anneli Henychová</i>	ZŠ Metelkovo nám., Teplice	7	6	13
41.–42. <i>Kryštof Jeník</i>	G, Jateční, Ústí nad Labem	7	6	13
43.–45. <i>Martina Bačová</i>	ZŠ Školská, Zábřeh	3	9	12
43.–45. <i>Matyáš Louda</i>	G, Turnov	7	5	12
43.–45. <i>Michal Potměšil</i>	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	7	5	12
46.–51. <i>Oleksii Avdiienko</i>	ZŠ s RVMPP, Teplice, Buzulucká	11	–	11
46.–51. <i>Tobiáš Batěk</i>	ZŠ a MŠ nám. Jiřího z Poděbrad,	8	3	11
46.–51. <i>Alexandr Fiala</i>	G Tišnov	11	–	11
46.–51. <i>Jan Miklík</i>	ZŠ a MŠ Velký Újezd	11	–	11
46.–51. <i>Barbora Ryšavá</i>	ZŠ Velká Dlážka, Přerov, Přerov	5	6	11

Kategorie osmých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	I 30	II 30	Σ 60
1. <i>Max Menčík</i>	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	27	29	56
2. <i>Sámo Šatánek</i>	ZŠ a MŠ Telecí	29	26	55
3. <i>Charlotte Hosszú</i>	G B. Němcové, HK	26	26	52
4. <i>Mariana Hlaváčková</i>	ZŠ a MŠ DOCTRINA, Liberec	26	24	50
5. <i>Martin Myška</i>	G B. Němcové, HK	27	21	48
6.–9. <i>Josef Eliáš Formánek</i>	G, Křenová, Brno	27	20	47
6.–9. <i>Jan Chalupa</i>	ZŠ E. Rošického, Jihlava	26	21	47
6.–9. <i>Barbora Samková</i>	ZŠ Prodloužená, Pardubice	22	25	47
6.–9. <i>Akim Sklenka</i>	G, Žamberk	22	25	47
10. <i>Antonín Slezák</i>	ZŠ Prodloužená, Pardubice	25	21	46
11. <i>Martin Černý</i>	G Teplice	28	17	45
12. <i>Johana Černá</i>	G J. Barranda, Beroun	26	16	42
13. <i>Filip Borkovec</i>	G, Křenová, Brno	22	17	39
14. <i>Martin Kalenský</i>	G, Nová Paka	21	17	38
15. <i>Aneta Přikrylová</i>	G, Zábřeh	22	15	37
16.–17. <i>Vojtěch Bartoš</i>	ZŠ Metelkovo nám., Teplice	22	12	34
16.–17. <i>Marek Růžička</i>	G, Brno-Řečkovice	21	13	34
18. <i>Běla Poláčková</i>	ZŠ Mírová, Ústí nad Labem	19	14	33
19.–21. <i>Petr Barták</i>	Slovanské G, Olomouc	17	13	30
19.–21. <i>Stanislav Křikava</i>	ZŠ a MŠ Chelického, Praha 3	13	17	30
19.–21. <i>Dominik Kudr</i>	ZŠ a MŠ Studenec	17	13	30
22. <i>Marie Prokešová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	7	21	28
23. <i>Tomáš Cícha</i>	ZŠ Komenského náměstí, Kroměříž	12	14	26
24. <i>Daniel Přívětivý</i>	G Arcus, Praha	–	25	25
25.–26. <i>Eliška Fleková</i>	G B. Němcové, HK	11	13	24
25.–26. <i>Kryštof Němeček</i>	ZŠ Gajdošova, Brno	17	7	24
27. <i>Ondřej Roubal</i>	ZŠ Kladská, Praha 2	23	–	23
28.–29. <i>Regína Mládková</i>	Gymnázium Olomouc	20	–	20
28.–29. <i>Michal Váňa</i>	ZŠ T. G. M. Lomnice nad Popelkou	9	11	20
30.–33. <i>Anna Matišázková</i>	G, Turnov	–	18	18
30.–33. <i>Sofia Mazur</i>	ZŠ, Liberec, Oblačná	13	5	18
30.–33. <i>Vít Soják</i>	ZŠ Horní Čermná	18	–	18
30.–33. <i>Pavel Stejskal</i>	Letohradské soukromé gymnázium L	13	5	18
34. <i>Matěj Knop</i>	G Christiana Dopplera, Praha	17	–	17
35. <i>Anna Voráčová</i>	G, Žatec	9	7	16
36.–39. <i>Jan Kuneš</i>	G, Žatec	9	6	15
36.–39. <i>Jan Marek</i>	ZŠ Horní Čermná	–	15	15
36.–39. <i>Aneta Mičulková</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	9	6	15
36.–39. <i>Natálie Prášková</i>	2. ZŠ JAK Milevsko	–	15	15
40.–41. <i>Lukáš Húdek</i>	G Alejová, Košice	14	–	14
40.–41. <i>Nikol Nemerádová</i>	G, Olomouc-Hejčín	8	6	14
42.–47. <i>Kristýna Blahová</i>	G Opatov, Praha	8	5	13
42.–47. <i>Monika Chamradová</i>	ZŠ Hornická, Hlučín	9	4	13
42.–47. <i>Michal Janeček</i>	ZŠ Sokolská, Třeboň	13	–	13
42.–47. <i>Václav Lička</i>	ZŠ Trutnov, Komenského 399	7	6	13
42.–47. <i>Kateřina Svejkská</i>	G, Mostecká, Chomutov	6	7	13
42.–47. <i>Milan Šmidrkal</i>	G B. Němcové, HK	–	13	13
48.–49. <i>Magdalena Cariková</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	12	–	12
48.–49. <i>Ema Šípková</i>	ZŠ, Liberec, Oblačná	12	–	12
50.–52. <i>Ondřej Bohatý</i>	G Opatov, Praha	10	–	10

Kategorie devátých ročníků

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	I 30	II 30	Σ 60
1. <i>Kosma Šatánek</i>	ZŠ a MŠ Telecí	29	27	56
2. <i>Anna Kostková</i>	G Ústavní, Praha	29	23	52
3. <i>Ondřej Pavelka</i>	ZŠ a MŠ Pňovice, Litovel	25	15	40
4. <i>Alena Mouchová</i>	G, Český Krumlov	20	12	32
5. <i>Mária Jevíková</i>	První české G, Karlovy Vary	15	16	31
6. <i>Eliška Matúšová</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	13	17	30
7. <i>Ctirad Kavka</i>	G, Uherské Hradiště	16	7	23
8. <i>Patrik Pilný</i>	ZŠ Pardubice - Studánka	8	13	21
9.–10. <i>Jakub Mráček</i>	ZŠ Schulz. sady, Dvůr Králové	20	–	20
9.–10. <i>Ondřej Zapletal</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	14	6	20
11. <i>Vojta Bednář</i>	ZŠ a MŠ T. G. Masaryka Černilov	6	12	18
12.–13. <i>Lucie Endlová</i>	G O. Havlové, Ostrava	9	5	14
12.–13. <i>Julie Vlčanová</i>	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	8	6	14
14. <i>Veronika Pelantová</i>	ZŠ Postoloprty	5	7	12
15.–16. <i>Egor Gorbachev</i>	G, Tachov	7	4	11
15.–16. <i>Miroslava Stachová</i>	G, Mikulov	6	5	11
17.–19. <i>Michael Kuna</i>	G Ústavní, Praha	9	–	9
17.–19. <i>Míla Tomášová</i>	G Jana Keplera, Praha	9	–	9
17.–19. <i>Lucie Urbanová</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	9	–	9
20.–25. <i>Štěpánka Brejchová</i>	ZŠ Štáflova, Havlíčkův Brod	–	8	8
20.–25. <i>Josef Čvančara</i>	ZŠ Mazurská, Praha 8	8	–	8
20.–25. <i>Jolana Dušková</i>	G, SpgŠ, OA a JŠ Znojmo	8	–	8
20.–25. <i>Lukáš Koucký</i>	G Jana Keplera, Praha	8	–	8
20.–25. <i>Elizabeth Maldonado</i>	ZŠ nám. Jiřího z Poděbrad, Praha	8	–	8
20.–25. <i>Alex Strnad</i>	G Jana Keplera, Praha	8	–	8
26.–33. <i>Albert Fiala</i>	Fakultní ZŠ PedF UK a MŠ Praha 7	7	–	7
26.–33. <i>Vít Hromas</i>	G Jana Keplera, Praha	7	–	7
26.–33. <i>Jiří Konečný</i>	Katolické gymnázium Třebíč	7	–	7
26.–33. <i>Natálie Lászlóová</i>	Wichterlovo G, Ostrava	7	–	7
26.–33. <i>Tomáš Marek</i>	Církevní G, Plzeň	7	–	7
26.–33. <i>Markéta Němcová</i>	Zeměd. akad. a Gymnázium Hořice	7	–	7
26.–33. <i>Valentýna Páníková</i>	PORG, Praha	7	–	7
26.–33. <i>Eliška Stehlíková</i>	G, SpgŠ, OA a JŠ Znojmo	7	–	7
34.–41. <i>Ema Čadová</i>	MŠ a ZŠ Beehive s.r.o. Praha 10	6	–	6
34.–41. <i>Filip Franc</i>	ZŠ Hovorčovická, Praha 8 - Kobyl	6	–	6
34.–41. <i>Petr Haraslim</i>	ZŠ Mazurská, Praha 8	6	–	6
34.–41. <i>Alice Hartlová</i>	Zeměd. akad. a Gymnázium Hořice	6	–	6
34.–41. <i>Klára Hašová</i>	G, Křenová, Brno	–	6	6
34.–41. <i>Johanka Hrbáčková</i>	MŠ a ZŠ Beehive s.r.o. Praha 10	6	–	6
34.–41. <i>Jakub Latiak</i>	ZŠ a MŠ Praha - Vinoř	6	–	6
34.–41. <i>Lucie Starmanová</i>	ScioŠkola Praha 3	6	–	6
42.–47. <i>Veronika Košatová</i>	G Opatov, Praha	5	–	5
42.–47. <i>Simona Krejsová</i>	ZŠ a MŠ Fryčovická, Praha 9	5	–	5
42.–47. <i>Anda Prusova</i>	MŠ a ZŠ Beehive s.r.o. Praha 10	5	–	5
42.–47. <i>Jiří Puchýř</i>	ZŠ Praha 5 - Řeporyje	5	–	5
42.–47. <i>Anna Marie Šafářová</i>	ZŠ T. G. Masaryka Plzeň	5	–	5
42.–47. <i>Zbyněk Šustr</i>	ZŠ A. Baráka Lovosice	5	–	5
48.–52. <i>Andriј Ciko</i>	ZŠ a MŠ Školní, Roudnice nad Lab	4	–	4
48.–52. <i>Domínik Horáček</i>	ZŠ a MŠ Školní, Roudnice nad Lab	4	–	4
48.–52. <i>Jiří Roub</i>	ZŠ Praha 4 - Modřany	4	–	4

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	I 30	II 30	Σ 60
48.–52. Anna Ševčíková	ZŠ Pátova, Česká Lípa	4	–	4
48.–52. Alžběta Votrubová	ZŠ Pátova, Česká Lípa	4	–	4
53.–58. Marek Houžka	ZŠ a MŠ Školní, Roudnice nad Lab	3	–	3
53.–58. Matouš Maděra	ZŠ Praha 4 - Modřany	3	–	3
53.–58. Lukáš Panc	ZŠ Praha 5 - Řeporyje	3	–	3
53.–58. Eliška Panešová	ZŠ a MŠ Školní, Roudnice nad Lab	3	–	3
53.–58. Robin Salat	SPŠ na Proseku Praha 9	3	–	3
53.–58. Amira Sevikpayeva	ZŠ Praha 5 - Řeporyje	3	–	3
59.–61. Natálie Kušínová	ZŠ a MŠ Školní, Roudnice nad Lab	2	–	2
59.–61. Antonie Salzmannová	ZŠ a MŠ Školní, Roudnice nad Lab	2	–	2
59.–61. Tereza Topinková	ZŠ Pátova, Česká Lípa	2	–	2
62.–63. Anastasiia Ilnitska	ZŠ a MŠ gen. F. Fajtla Praha 9	1	–	1
62.–63. Michal Železnák	ZŠ Praha 5 - Řeporyje	1	–	1



**Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8**

www: <https://vyfuk.org>
e-mail: vyfuk@vyfuk.org

 **/ksvyfuk**  **@ksvyfuk**

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.