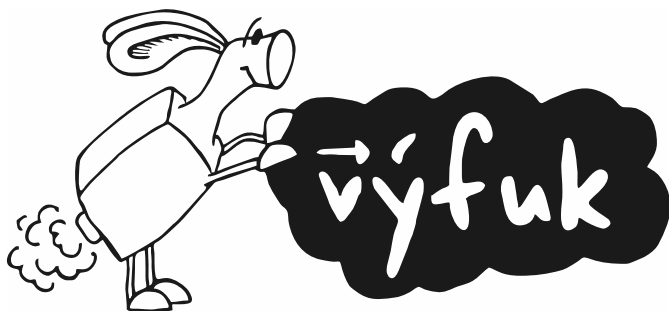




výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

Organizátoři

vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz



Zadání VIII. série



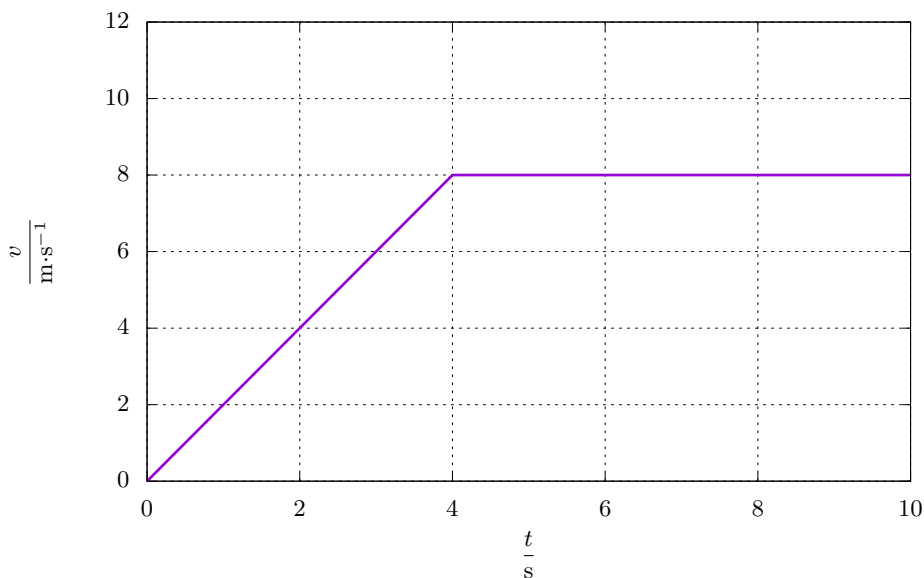
Termín odeslání: 17. 7. 2023 20.00

Úloha VIII.1 ... Prázdninový kvíz ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

10 bodů

- Který druh cukru se v čaji rozpustí nejrychleji?
 - moučka
 - krupice
 - krystal
 - kostkový
- Proč se ocelová loď nepotopí, ale plave na hladině?
 - kvůli povrchovému napětí
 - kvůli vyšší hustotě slané vody
 - kvůli nízké hustotě oceli
 - loď vytlačuje velké množství vody
- Který parametr neovlivňuje difuzi částic?
 - velikost částic
 - tvár částic
 - teplota
 - věk experimentátora
- Co můžeme použít v elektrickém obvodu místo baterie?
 - dřevo
 - olej
 - citron
 - diamant
- Která jednotka není jednotkou SI?
 - sekunda
 - libra
 - ampér
 - kandela

6. Pokud do válce nalijeme rtuť, olej a vodu, seřadí se tyto kapaliny odspodu v pořadí:
- a) rtuť, voda, olej
 - b) voda, rtuť, olej
 - c) rtuť, olej, voda
 - d) olej, voda, rtuť
7. V jaké skupenství se změní plyn, pokud ho hodně zahřejeme?¹
- a) přemění se na kapalinu
 - b) přemění se na pevnou látku
 - c) přemění se v plazma
 - d) plyn už se při zahřívání v žádné další skupenství nezmění
8. V grafu 1 můžete vidět závislost rychlosti běžce na čase. Graf zobrazuje jeho rychlost v časovém intervalu 10 s. Jakou vzdálenost běžec během zmíněných 10 s uběhl?



Obrázek 1: Rychlost běžce v čase

- a) 60 m
 - b) 58 m
 - c) 64 m
 - d) 50 m
9. Co je pro všechny planety stejné?
- a) jejich objem
 - b) tíhové zrychlení na jejich povrchu
 - c) gravitační zrychlení na jejich povrchu
 - d) gravitační konstanta
10. Vyzařuje Měsíc vlastní paprsky?
- a) ano, vyzařuje vlastní paprsky
 - b) ne, pouze odráží paprsky, které vyzařuje Slunce
 - c) ano, jeho povrch fluoreskuje
 - d) ne, pouze odráží paprsky, které vyzařuje Země

¹Uvažujte, že objem udržujeme přibližně konstantní.

Úloha VIII.2 ... Newton a jablko ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

10 bodů

Snad každý zná příběh o objevu gravitace. Isaac Newton údajně objevil svou slavnou teorii inspirován tím, že mu na hlavu spadlo ze stromu jablko. V této úloze se zamyslíme, jak pravděpodobné je, že k tomu skutečně došlo. Předpokládejme, že by Newton seděl pod stromem každý den 3 hodiny. Kolik let by musel průměrně pod stromem sedávat, aby mu na hlavu spadlo jedno jablko?

Všechny potřebné údaje si buď dohledejte nebo odhadněte.

**Úloha VIII.3 ... Vlastnosti vlaštovek ⑥ ⑦ ⑧ ⑨**

10 bodů

Bětka v létě ležela na zádech v trávě a přemýšlela o krásách fyziky. Myšlenky se jí však postupně zatoulaly ke kluzákům, které jí létaly nad hlavou. Zamyslela se, jak je možné, že umí volně plachtit, aniž by spadly na zem. Rychle se zvedla a běžela domů, kde se pokusila poskládat si z papíru vlaštovku s co největším doletem.

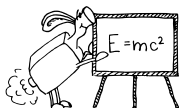
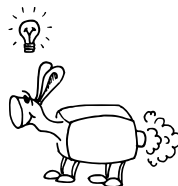


Udělej to stejně, co Bětka. Poskládej alespoň 3 různé modely papírových vlaštovek a pokus se objektivně změřit vzdálenost, do níž doletí. Který model létá nejlépe?

Hrají roli nějaké vychytávky, které se u vlaštovek používají? Mohou jimi být ohnutí špičky křídel nahoru nebo drobné zatížení špičky. Vyber si jednu z vlaštovek, které jsi poskládal, a změř alespoň pro tři různé vychytávky, zda s nimi doletí dál.

Neboj se zapojit svou fantazii, ať už při výrobě vlaštovek nebo jejich vylepšování!

Doporučení: Dolet vlaštovky vždy měř raději několikrát, protože se může při různých hodech poměrně výrazně měnit.

**Řešení VI. série****Úloha VI.1 ... Drbárna**

5 bodů; průměr 4,00; řešilo 20 studentů

Ester si v pondělí naplánovala na víkend tajný výlet do Frýdku-Místku a rozhodla se podělit o své tajemství se svými třemi kamarádkami. Následující den každá z těchto kamarádek ono tajemství vyzradila dalším třem kamarádkám. Tímto stylem to pokračovalo i další dny, přičemž ani Ester, ani kamarádky, které tajemství již jednou rozšířily, jej znovu nikomu neřekly. Kolik lidí bude tajemství znát v pátek?

K řešení našeho příkladu můžeme využít rozmanité postupy. Lze jednoduše použít grafické řešení či zápis dat do tabulky. Pojďme se ale podívat, jak lze při řešení využít znalosti posloupností. Ester řekne své tajemství třem kamarádkám, každá z nich ho poví dalším třem a ty dalším atd. V pondělí se vyzrazením tajemství pomyslně rozjela tzv. *geometrická posloupnost*, tedy posloupnost čísel, kde každé následující je násobkem toho předchozího.

Co jednotlivá čísla v této posloupnosti představují? Jsou to právě počty kamarádek, které se v daný den Esterino tajemství dozvěděly. První den se dozví tajemství 3 dívky. První člen

naší posloupnosti je tedy $a_1 = 3$. Druhý každá z těchto 3 kamarádek poví tajemství dalším 3, dozví se ho tedy dalších $a_2 = a_1 \cdot 3 = 9$ dívek. Takto to pokračuje dále, přičemž sousední čísla v posloupnosti se vždy liší o násobek 3. Ten se nazývá *kvocient* a obvykle se značí q .

Máme tedy:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 3^2, \quad a_3 = 3^3,$$

atd. až po a_5 , neboť to odpovídá počtu dívek, které se tajemství dozví v pátek. Sečtením všech členů naší posloupnosti pak získáme celkový počet kamarádek.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 363$$

V pátek tedy bude znát tajemství 363 kamarádek. Samozřejmě by bylo rozumné zahrnout do lidí, kteří tajemství znají, i Ester. Za tímto účelem bychom mohli přičíst vcelku logický člen posloupnosti $a_0 = 1$ a obdržíme jako finální výsledek 364.

Julie Weisová

julca@vyfuk.org

Úloha VI.2 ... (Ne)malé klubíčko

5 bodů; průměr 4,36; řešilo 55 studentů

Soňa si háčkuje trojúhelníkový šátek mušličkovým vzorem. Začala řadou o šedesáti mušličkách a každou další řadu háčkuje vždy o mušličku kratší do mezer (jako když se staví pyramida z kostek). Vystačí jí klubíčko na celý šátek, jestliže po osmnácti řadách spotřebovala polovinu klubíčka?



V úloze budeme předpokládat, že na uhákování jedné mušličky je potřeba vždy stejné množství vlny. Abychom mohli posoudit, zda Soně klubíčko vystačí, potřebujeme spočítat, kolik mušlíček je v prvních 18 řadách a kolik jich je ve zbylých 42 řadách. V prvních 18 jich bude

$$(60 + 59 + 58 + \dots + 45 + 44 + 43) \text{ mušlíček.}$$

Vezmeme-li vždy jedno číslo od konce a jedno od začátku, při jejich spárování do dvojic bude jejich součet vždy roven 103 ($60 + 43 = 103$, $59 + 44 = 103$, $58 + 45 = 103$ a tak dále). Takových dvojic čísel, jejichž součet je vždy 103, bude polovina z celkového počtu čísel, tedy polovina z 18, což je 9. Proto můžeme počet mušlíček spočítat jako součet první a osmnácté řady, který vynásobíme polovinou počtu řad (18 řad, polovina je proto 9). V našem případě dostaneme:

$$p_1 = (60 + 43) \cdot 9 = 927.$$

Obdobně spočítáme i počet mušlíček v posledních 42 řadách. Mohli bychom ho spočítat i jako součet $42 + 41 + 40$ a tak dále až do 1, ale takový postup je zdoluhavý, a proto je výhodnější opět sečíst počet mušlíček v první řadě a poslední řadě (ze 42 posledních řad, kterými se teď zabýváme), tedy $42 + 1$, a tento součet vynásobit polovinou počtu řad (42 řad, polovina je proto 21). Pak dostaneme:

$$p_2 = (42 + 1) \cdot 21 = 903.$$

Soňa už uháčkovala 927 mušlíček a zbývá jí dalších 903. Na uhákování 927 mušlíček spotřebovala polovinu klubíčka. Zbývá jí ještě druhá půlka klubíčka, ze které může uhákovat také 927 mušlíček. Potřebuje však uhákovat pouhých 903 mušlíček, a proto jí klubíčko vystačí na celý šátek.

Jakub Savula

savula@vyfuk.org

Úloha VI.3 ... Plníme

6 bodů; průměr 5,12; řešilo 32 studentů

Lukáš dostal za úkol zalít záhon, k čemuž používá konev o objemu $V = 10\text{ l}$. Obklopen přírodou se u plnění zamyslel, a když se probрал, bylo v konvi již 9 l vody. Začal tedy zatahovat kohoutek tak, že změna průtoku za čas byla $q = 30\text{ l}\cdot\text{min}^{-2}$. Rozhodněte, zda Lukášovi voda přetékla, nebo ne. Maximální průtok vody z kohoutku byl $Q = 10\text{ l}\cdot\text{min}^{-1}$. Jak dlouho má trvat celé plnění, aby po zastavení proudu vody byla konev plná a žádná voda nepřišla nazmar? Na počátku je nulový průtok a Lukáš otevírá kohoutek stejně rychle, jako ho zatahuje.



V této úloze využijeme analogie s rovnoměrně zrychleným a zpomaleným pohybem. Analogie je takový druh podobnosti, který v našem případě říká, že pro veličiny jako je zvětšování a zpomalování průtoku platí obdobné fyzikální vztahy jako pro rovnoměrně zrychlený pohyb. Při pohybu studujeme uraženou dráhu a u konve máme množství vody. Rychlosti chápeme uraženou dráhu za určitý čas a průtok odpovídá množství vody, která nateče do konve za určitý čas. Víme tedy, že rychlost i průtok jsou definovány „stejně“, proto poznatky získané studiem pohybu můžeme využít i při plnění konve vodou.

Začneme tím, že zjistíme, jestli Lukášovi voda z konve přetékla. Konev má objem $V = 10\text{ l}$ a je v ní již 9 l vody, proto se do ní vešel už jen jeden litr $(10 - 9)\text{ l} = 1\text{ l}$. Průtok před začátkem zavírání kohoutku byl $Q = 10\text{ l}\cdot\text{min}^{-1}$, kde je tato veličina analogická k rychlosti. Lukáš začal kohoutek zavírat se změnou průtoku za čas $q = 30\text{ l}\cdot\text{min}^{-2}$. Zde využijeme analogii zrychlení. My chceme spočítat objem vody, který během zavírání kohoutku protekl, ten je v našem případě veličina analogická dráze rovnoměrně zpomaleného pohybu. Pro něj platí vztah:

$$V' = \frac{1}{2}qt^2.$$

V tomto vztahu známe hodnoty všech veličin kromě času t , po který bude Lukáš kohoutek zavírat. Ten můžeme ale také spočítat, neboť se potřebujeme z průtoku $Q = 10\text{ l}\cdot\text{min}^{-1}$ dostat na průtok $Q_0 = 0\text{ l}\cdot\text{min}^{-1}$. Tento průtok se bude snižovat se změnou průtoku za čas o velikosti $q = 30\text{ l}\cdot\text{min}^{-2}$. Pro čas proto bude platit:

$$t = \frac{Q}{q}.$$

Dosazením času do vztahu pro výpočet objemu dostaneme:

$$V' = \frac{1}{2}q \left(\frac{Q}{q} \right)^2 = \frac{Q^2}{2q}.$$

Teď už jen dosadíme hodnoty a získáme:

$$V' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(10\text{ l}\cdot\text{min}^{-1})^2}{30\text{ l}\cdot\text{min}^{-2}},$$

$$V' = \frac{5}{3}\text{ l}.$$

Lukáš má v konvi ale už jen 1 l volného prostoru, a protože $5/3\text{ l}$ je větší než 1 l, Lukášovi konev přetече.

Ted ještě máme za úkol vypočítat, jak dlouho bude trvat naplnění celé konve tak, abychom skončili se zavřeným kohoutkem a žádná voda nepřetékla. Čas, po který bude probíhat zavírání kohoutku, jsme vyjádřili jako:

$$t = \frac{Q}{q}.$$

Stejně dlouho bude trvat i otevírání kohoutku. Stejně jako při zavírání kohoutku potřebujeme změnit průtok o $101 \cdot \text{min}^{-1}$. Změnou průtoku tedy bude trvat $q = 301 \cdot \text{min}^{-2}$.

Výše jsme spočítali, že během zavírání kohoutku nateče do konve $V' = 5/31$. Stejný objem nateče i během otevírání kohoutku. Celkem tedy v průběhu otevírání a zavírání kohoutku nateče $2V' = 10/31$ vody. Zbývá nám tedy do konve nalít $V_z = V - 2V' = 101 - 10/31 = = 20/31$. Tento objem (V_z) budeme napouštět stálým průtokem $Q = 101 \cdot \text{min}^{-1}$. Čas spočteme analogicky k rovnoměrnému pohybu, tedy jako:

$$t_z = \frac{V_z}{Q}.$$

Celkový čas pak spočítáme jako součet času t , po který Lukáš kohoutek otevíral, času t_z , kdy probíhalo plnění stálým průtokem Q , a času t při zavírání kohoutku. Celkem tedy dostaneme:

$$t_c = t + t_z + t = 2t + t_z,$$

$$t_c = 2 \frac{Q}{q} + \frac{V_z}{Q},$$

$$t_c = 2 \cdot \frac{101 \cdot \text{min}^{-1}}{301 \cdot \text{min}^{-2}} + \frac{20/31}{101 \cdot \text{min}^{-1}},$$

$$t_c = \frac{4}{3} \text{ min} = 80 \text{ s}.$$

Lukášovi při plnění konve voda přeteče. Kdyby ji chtěl naplnit, aby mu žádná voda nepřetékla, trvalo by to 80 sekund.

Jakub Savula
savula@vyfuk.org

Úloha VI.4 ... Upgrade zbraně

6 bodů; průměr 5,71; řešilo 21 studentů

Viktor nebyl spokojený s dostřelem a přesností své airsoftové zbraně, a tak začal přemýšlet nad tím, jak by mohl tyto parametry zlepšit. Napadlo ho vyměnit pružinu a zvýšit hmotnost použitých kuliček. Záhy si ale uvědomil, že to nevyhnutelně povede ke snížení počtu výstřelů na jedno nabití akumulátoru. O kolik kuliček méně bude Viktor nově schopen na jedno nabití akumulátoru vystřelit, pokud dosud používal kuličky vážící $m_1 = 0,25 \text{ g}$, kterým pružina udělila ústovou rychlost $v_1 = 130 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, a nově bude chtít používat kuličky vážící $m_2 = 0,32 \text{ g}$, kterým nová pružina dodá ústovou rychlost $v_2 = 160 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$? Viktorův akumulátor má náboj $Q = 1500 \text{ mAh}$ a napětí $U = 9,6 \text{ V}$. Předpokládejte, že celková účinnost zbraně $\eta = 0,14$ (tj. účinnost, se kterou akumulátor mění elektrickou energii na mechanickou) se při výměně pružiny a přechodu na jiný typ střeliva nezměnila.

Úlohu budeme řešit tak, že si nejprve spočítáme celkovou dostupnou energii v akumulátoru E_a . Poté si spočítáme pro oba scénáře kinetickou energii jedné kuličky bezprostředně po opuštění

hlavně zbraně. Následně vydělíme celkovou dostupnou energii energií jedné kuličky a porovnáme, kolik kuliček se Viktorovi podaří vystřelit před a po výměně pružiny a kuliček.

Pro výpočet elektrické energie akumulátoru musíme nejprve převést miliampérhodiny na coulomby. Jeden coulomb je definovaný jako jedna ampérsekunda, tedy při převodu z miliampérhodin na coulomby (ampérsekundy) musíme dělit 1000 a násobit 3600, ve výsledku tak násobíme 3,6. Potom už jen dosadíme elektrický náboj do vzorce pro elektrickou práci a dostaneme hledanou elektrickou energii:

$$E_a = Q \cdot U = 3,6 \cdot 1\,500\,\text{C} \cdot 9,6\,\text{V} = 51\,840\,\text{J}$$

Obecně platí, že kinetickou energii pohybujícího se tělesa počítáme jako součin poloviny jeho hmotnosti a rychlosti umocněné na druhou. Vyjádříme si tedy energii jedné kuličky před upgradem zbraně, přičemž použijeme značení ze zadání:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2.$$

Teď už můžeme dopočítat, kolik kuliček zvládne zbraň na jedno nabití před upgradem vystřelit. Nesmíme ovšem zapomenout na vynásobení E_a celkovou účinností zbraně, abychom dostali energii E_u , která se skutečně využije na urychlování kuliček:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{E_u}{E_{k1}} = \frac{E_a \cdot \eta}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}, \\ n_1 &= \frac{51\,840\,\text{J} \cdot 0,14}{\frac{1}{2} 0,000\,25\,\text{kg} \cdot 130\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}{}^2} \doteq 3\,435,55. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že zbraň dokáže střílet jen celé kuličky, musíme náš výsledný počet zaokrouhlit vždy dolů. Na jedno nabití tak připadá 3 435 kuliček.

Stejným způsobem spočítáme počet vystřelených kuliček po upgradu:

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{E_u}{E_{k2}} = \frac{E_a \cdot \eta}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}, \\ n_2 &= \frac{51\,840\,\text{J} \cdot 0,14}{\frac{1}{2} 0,000\,32\,\text{kg} \cdot 160\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}{}^2} \doteq 1\,771,88. \end{aligned}$$

Počet celých vystřelených kuliček by byl 1 771. Zbývá už jen dopočítat rozdíl:

$$n_1 - n_2 \doteq 3\,435 - 1\,771 \doteq 1\,664.$$

Viktor bude tedy po upgradu své zbraně schopen vystřelit jen přibližně polovinu množství kuliček, na které byl zvyklý. Buď tedy bude muset začít s kuličkami během hry šetřit, anebo si může pořídit silnější nebo náhradní akumulátor.

Viktor Materna
materna@vyfuk.org

Úloha VI.5 ... Kulička na provázku

7 bodů; průměr 4,69; řešilo 13 studentů

Jirka doma našel kuličku o hmotnosti $m = 50\text{ g}$ zavěšenou na tenkém nehmotném provázku délky $l = 50\text{ cm}$ a začal s ní provádět pokusy.

1. Napřed kuličku roztočil takovým způsobem, že obíhala po kružnici v horizontální rovině s frekvencí $f_1 = 1\text{ Hz}$. O jaký úhel byl provázek vychýlený oproti svislému směru?
2. Nyní by chtěl kuličku roztočit tak, aby po kruhové dráze obíhala 2krát pomaleji, tedy s frekvencí $f_2 = 0,5\text{ Hz}$. Podaří se mu to? Pokud ano, tak o jaký úhel bude nyní provázek vychýlený? Pokud ne, vysvětlete, proč se mu to nepodaří a co se bude s kuličkou dít? (tj. nemusíte nic počítat).

Jirka kuličku roztáčí tak, že ji vždy vychýlí o vhodný úhel a poté jí udělí vhodnou rychlost kolmou na směr odchýlení. V úloze zanedbejte odporové síly.

1. Úhel, o který se kulička odchýlila od svislého směru, budeme označovat α . Na kuličku budou následně působit dvě síly.

První z nich bude tíhová síla, která bude působit svislým směrem a bude mít velikost:

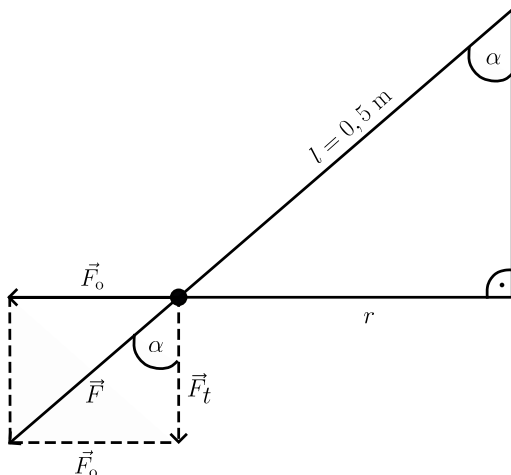
$$F_t = mg,$$

kde $m = 0,05\text{ kg}$ je hmotnost kuličky a g je tíhové zrychlení.

Další bude odstředivá síla, která bude působit ven z kruhu, po kterém se kulička pohybuje. Její velikost bude:

$$F_o = m\omega^2 r,$$

kde ω je úhlová rychlost, která je spjata s frekvencí vztahem $\omega = 2\pi f_1$, z čehož $f_1 = 1\text{ Hz}$ je zadaná frekvence a r je poloměr kruhové trajektorie, po které se kulička pohybuje. Velikost poloměru r zvládneme spočítat pomocí délky provázku l , neboť r a l jsou délky stran v pravoúhlém trojúhelníku na obrázku 2.



Obrázek 2: Kulička na provázku spolu s působícími silami

Ve zmíněném pravoúhlém trojúhelníku platí:

$$\sin \alpha = \frac{r}{l},$$

odkud můžeme vyjádřit r . Pokud tedy do vztahu pro F_o dosadíme zmíněné vztahy za ω a za r , dostaneme:

$$F_o = m(2\pi f)^2 l \sin \alpha.$$

Z obrázku 2 vidíme, že tangens úhlu α spočítáme pomocí velikostí působících sil jako:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_o}{F_t}.$$

Dosazením za síly dostaneme:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m(2\pi f)^2 l \sin \alpha}{mg}.$$

Tangens následně můžeme přepsat jako podíl sinu a kosinu:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{m(2\pi f)^2 l \sin \alpha}{mg}.$$

Teď můžeme pokrátkit hmotnosti m a $\sin \alpha$ a dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \alpha} &= \frac{(2\pi f)^2 l}{g}, \\ \cos \alpha &= \frac{g}{(2\pi f)^2 l}. \end{aligned}$$

Dosazením $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $f = 1 \text{ Hz}$ a $l = 0,5 \text{ m}$ získáme hodnotu $\alpha = 60,2^\circ$. Kulička tedy bude vychýlena od svislého směru o úhel o velikosti $60,2^\circ$.

2. Pokud by frekvence byla $f_2 = 0,5 \text{ Hz}$, pak bychom pro poslední uvedenou rovnici získali dosazením

$$\cos \alpha = 1,99.$$

Funkce kosinus však může nabývat pouze hodnot od -1 do 1 , tedy tato rovnice nemá řešení. Co to však znamená pro pohyb kuličky? Víme, že pro frekvenci $f_1 = 1 \text{ Hz}$ řešení existuje, zamysleme se proto, co se bude dít, když budeme frekvenci pohybu po kruhové dráze zmenšovat.

V předchozí části jsme získali rovnici:

$$\cos \alpha = \frac{g}{(2\pi f)^2 l}.$$

Vidíme, že pro čím dál menší frekvenci se $\cos \alpha$ zvětšuje, úhel α se proto zmenšuje, až je v určitý okamžik $\alpha = 0$. Pak je ale i $r = 0$. To by v tento okamžik však znamenalo, že se kulička vůbec nepohybuje! Hraniční frekvence oběhu po kružnici tedy je:

$$\begin{aligned} \cos \alpha = 1 &= \frac{g}{(2\pi f_{\min})^2 l}, \\ f_{\min} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}. \end{aligned}$$

Pro naše hodnoty máme $f_{\min} \doteq 0,7 \text{ Hz}$. Pro menší frekvence už se nám tedy nepodaří kuličku roztočit tak, aby obíhala po kruhové dráze.

Mohli bychom si ještě položit otázku, zda je vůbec možné, aby frekvence oběhu kuličky byla $f = 0,5 \text{ Hz}$ v případě, kdy pohyb nemusí být po kružnici.

Budeme postupovat podobně jako před chvílí. Uvažujme, že chceme kuličku roztočit po kruhové dráze pro známou frekvenci $f_1 = 1 \text{ Hz}$, tedy ji vychýlíme o příslušný úhel α (viz část 1) a udělíme jí potřebnou rychlost ve směru kolmém na výchylku. Pak bude kulička obíhat po kružnici, přesně jako jsme spočítali v části 1.

Co když jí nyní udělíme o něco menší rychlost (při stejné počáteční výchylce)? Pak již oběh nebude po kružnici, ale po nějaké podivné trojrozměrné křivce, která při pohledu shora bude pravděpodobně připomínat elipsu.

Co se stane s frekvencí? Intuitivně dává smysl, že by se měla zmenšit, měli bychom to však doložit nějakým argumentem. Zmenšujeme tedy počáteční rychlost dále, až se nakonec dostaneme na 0. Tím nám z kuličky na provázku prakticky vznikne obyčejné kyvadlo. Frekvenci kmitů známe pro *malé výchylky* jako:

$$f_{\text{malé}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}},$$

tedy stejná frekvence jako $f_{\min}$ pro pohyb po kružnici! Frekvence se tedy skutečně pro menší rychlosti zmenšuje, a navíc vidíme, že ani v případě malých výchylek se nám frekvenci pohybu nepodaří zmenšit více, než na $f_{\min}$.

Zbývá vyřešit otázku velkých výchylek, kdy již nemůžeme využít aproximace použité u matematického kyvadla. Pro matematické kyvadlo předpokládáme, že síla, která se snaží dostat kyvadlo do rovnovážné polohy, je přímo úměrná výchylce. Obecně je však úměrná $\sin x$, kde x je výchylka a pro sinus platí

$$\sin x < x$$

pro kladné x . Skutečná síla je tedy obecně menší než síla, kterou předpokládá matematické kyvadlo, proto perioda skutečného kyvadla je vždy větší. Vypočítat frekvenci skutečného kyvadla je velmi těžké, pro naše konkrétní hodnoty vyjde, že při počáteční výchylce 90° je frekvence o něco menší než $0,6 \text{ Hz}$. S naším kyvadlem se nám tedy dosáhnout pohybu s frekvencí $0,5 \text{ Hz}$ nikdy nepodaří.

Jakub Savula
savula@vyfuk.org

Úloha VI.E ... Izolace

7 bodů; průměr 5,87; řešilo 30 studentů

Změřte dobu tání kostky ledu položené na různých materiálech. Na základě měření srovnajte použité materiály podle toho, jak dobře vedou teplo. Správnost svého seřazení materiálů ověřte pomocí hodnot součinitele tepelné vodivosti (čím vyšší hodnota, tím lépe materiál vede teplo), které si dohledáte. U vyhledaných hodnot nezapomeňte uvést zdroje.



Teorie

K tepelné výměně mezi tělesy může docházet buďto pomocí infračerveného záření, nebo vzájemným dotykem mezi tělesy. My budeme zkoumat případ, kdy se teplo předává dotykem těles.

V místě dotyku přechází teplo z teplejšího tělesa na chladnější. V našem případě je chladnější těleso led, který přijaté teplo spotřebovává na skupenskou přeměnu, konkrétně tání.

Chladnější těleso přijaté teplo zároveň rozvádí do celého svého objemu, tedy se prohřívají všechny jeho části. Neprohřívají se však rovnoměrně, protože nějakou dobu trvá, než se teplo do vzdálenějších částí dostane. Jak rychle, resp. jak dobře se teplo tělesem šíří, udává veličina teplotní vodivost. Pro konkrétní látky je pak důležitý koeficient (součinitel) teplotní vodivosti. Čím je jeho hodnota vyšší, tím lépe látka teplo rozvádí.

My ale nesledujeme, jak dobře teplo rozvádí led sám o sobě, ale jak dobře mu ho přivádí podložka, na níž je led položen. Led přijme teplo z malého místa, na kterém leží, a toto místo na podložce se velmi rychle ochladí na teplotu ledu. Kdyby materiál podložky nevedl teplo vůbec, k další tepelné výměně by nedocházelo a soustava by se tepelně ustálila. Protože však materiál podložky teplo vede, prostupuje jím teplo z teplejších částí směrem k onomu vychlazenému místu,² kde se tedy teplo může „doplňovat“. Čím lépe materiál podložky teplo vede, tím rychleji se ledem chlazené místo zase ohřívá a tím více tepla může led za stejný čas přijmout. A čím více tepla za stejný čas led přijme, tím více ho může spotřebovat na skupenskou přeměnu a rychleji roztát.

Špatné tepelné vodivosti některých materiálů se v praxi využívá pro tepelné izolace, např. polystyren používaný pro izolování domů nebo na krabičky na jídla „s sebou“ z různých restaurací velmi špatně vedou teplo. Naopak dobré tepelné vodivosti se využívá třeba v kotlích na ohřev vody, kdy je vnitřkem kotle vedena kovová trubka, která přijímá teplo od ohně a velmi efektivně ho přivádí k vodě uvnitř trubky.

Měření

Měřit budeme dobu tání kostek ledu o hmotnosti $m = 5\text{ g}$. Jako podložku zvolíme sklo (zařezávací sklenici), nerezovou ocel (hrníček), plast (podložku na krájení). Abychom zabránili ovlivnění experimentu způsobenému vodou, která vzniká při tání ledu, budeme vodu při měření pravidelně odsávat. Měření pro všechny materiály několikrát zopakujeme a závěr experimentu tedy bude vycházet z průměrné hodnoty všech měření.

nerez t min	sklo t min	plast t min
32	34	42
31	36	45
32	37	41
30	34	44
29	35	42

Tabulka 1: Naměřené časy tání pro jednotlivé materiály

²V tělese vzniká tzv. teplotní gradient, kdy teplota tělesa postupně klesá od nejteplejšího místa k nejméně teplejšímu.

Chybu měření vzhledem k náročnosti odhadnutí okamžiku, kdy už led roztál, a nerovnoměrným podmínkám pro jednotlivé kostky ledu (například odstraňování vody neprobíhalo při všech opakováních stejně) odhadneme na 1 min. Pro jednotlivé materiály získáváme průměrný čas tání ledu $t_1 = (31 \pm 1)$ min pro nerezovou ocel, $t_2 = (35 \pm 1)$ min pro sklo a $t_3 = (43 \pm 1)$ min pro plast.

Z naměřených hodnot tedy můžeme sestavit řadu od nejlépe tepelně vodivého materiálu (vlevo) po nejhůře tepelně vodivý (vpravo) takto:

nerezová ocel, sklo, plast.

Ze zvolených materiálů má nejvyšší koeficient tepelné vodivosti opravdu nerezová ocel $\lambda = 15 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ³. Následuje sklo s teplotní vodivostí okolo $\lambda = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ⁴ a nejmenší koeficient teplotní vodivosti má plast okolo $\lambda = 0,22 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ⁵.

Závěr

Naměřili jsme průměrný čas tání pětigramové kostky ledu $t_1 = (31 \pm 1)$ min pro nerezovou ocel, $t_2 = (35 \pm 1)$ min pro sklo a $t_3 = (43 \pm 1)$ min pro plast.

Řazení materiálů podle tepelné vodivosti od nejvodivějšího po nejhůře vodivý na základě experimentu: nerezová ocel, sklo, plast, odpovídá řazení podle skutečných hodnot koeficientů tepelné vodivosti jednotlivých materiálů $\lambda = 15 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ pro nerezovou ocel, $\lambda = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ pro sklo a pro plast $\lambda = 0,22 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Soňa Husáková

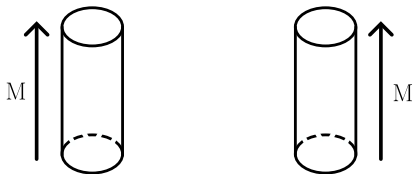
sona@vyfuk.org

Úloha VI.V ... Matoucí magnety

7 bodů; průměr 4,37; řešilo 19 studentů

Hynek s Alešem si hráli s neodymovými magnety a uchvátilo je jejich podivuhodné až magické chování. Pomozte jim zodpovědět několik otázek, s nimiž si při svém okouzlení nevěděli rady.

1. Rozhodněte, zda se dvojice magnetů na obrázcích 3 a 4 budou přitahovat, nebo odpuzovat. Stručně své rozhodnutí zdůvodněte.



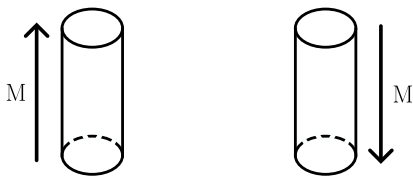
Obrázek 3: Obrázek k první podúloze.

2. Představme si dva magnety, jež jsou na počátku umístěny jako na obrázku 5, přičemž magnet 1 je upevněn na obou koncích, magnet 2 je upevněn uprostřed a může se volně otáčet. Slovně popište, jak se bude magnet 2 pohybovat.

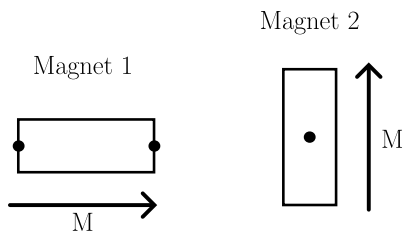
³<https://cz.china-stainless-steels.com/stainless-steel-plate/stainless-steel-316l-1-4404.html>

⁴<https://e-konstrukter.cz/prakticka-informace/merna-tepelna-kapacita-soucinitel-tepelne-vodivosti-latek>

⁵<https://builder.techinfus.com/cs/uteplenie/teploprovodnost-uteplitelej.html>



Obrázek 4: Obrázek k první a třetí podúloze.



Obrázek 5: Obrázek k druhé podúloze.

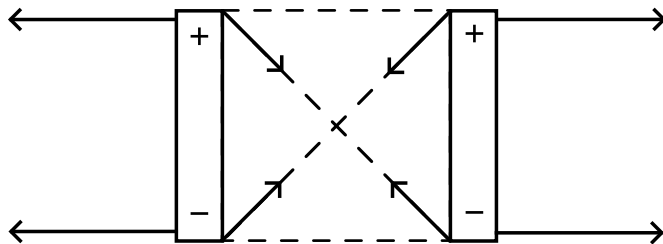
3. Vypočítejte, jaká síla bude působit mezi tyčovými magnety na obrázku 4. Uvažujte, že oba magnety jsou stejné. Jejich poloměr je $r = 0,5 \text{ cm}$ a délka $l = 2 \text{ cm}$, jejich magnetizace je $M = 1,5 \text{ T}/\mu_0$ a o jejich vzdálenosti $d = 10 \text{ cm}$ předpokládejte, že je mnohem větší než rozměry magnetů.

- Na prvním obrázku vidíme dva magnety, které mají oba stejně směřující vektor magnetizace. Tuto skutečnost můžeme vyjádřit ekvivalentním tvrzením, že magnety mají souhlasně orientované póly. Nepochybně ze svých zkušeností dokážete rovnou určit, že se magnety budou odpuzovat, ale my se nyní pokusíme nastínit trochu důkladnější úvahu, se kterou bychom se měli dopracovat ke správnému výsledku. Zkusme aplikovat náš trik, který přirovnává magnet ke dvěma bodovým magnetickým nábojům. Pro ty již umíme spočítat magnetickou sílu, kterou na sebe působí:

$$F = \mu \frac{\varphi_1 \varphi_2}{4\pi r^2},$$

kde φ_1 a φ_2 jsou magnetické náboje. Pokud tedy jednotlivé póly magnetu můžeme pomyslně nahradit těmito náboji, je pak možné chování magnetů dostatečně kvalitně popsat. Místo severních pólů si můžeme představit kladné magnetické náboje a místo jižních pólů naopak záporné. V celé situaci máme nyní čtyři náboje, které budou v důsledku principu superpozice mezi sebou působit celkem čtyřmi silami.

Dvě z nich jsou jmenovitě síla mezi oběma kladnými náboji a síla mezi zápornými. Obě mají odpuzivý charakter kvůli souhlasnému náboji. Jsou tu však ještě dvě další síly, a to mezi kladnými a zápornými náboji. Tyto síly naopak magnety přitahují, ale vzhledem k tomu, že kladný náboj je od záporného o trochu dál než od kladného (nebo záporný od záporného), bude příspěvek od přitažlivé síly o něco menší než od odpuzivé. Jak nám říká vztah uvedený výše, síla skutečně slábne se vzdáleností. Navíc přitažlivá síla na rozdíl od



odpudivé působí trochu šikmo vzhledem k magnetu, takže přitahování způsobuje pouze její horizontální složka, která je samozřejmě ještě menší než samotná velikost celé síly působící mezi kladným a záporným nábojem. Tímto jsme úvahou dokázali, že se magnety v prvním případě budou odpuzovat.

Jak to bude vypadat ve druhém případě? Zde máme magnety s opačně orientovanými vektory magnetizace. Celá situace je tak prohozená oproti té první. Nyní jsou blíž k sobě severní pól jednoho magnetu a jižní pól druhého (a naopak) než severní od severního a jižní od jižního. Ve výsledku je pak odpudivá síla, která nyní působí na větší vzdálenost, menší než přitažlivá, takže se magnety budou přitahovat.

2. Výstižně jsme teď popsali sílu, kterou na sebe magnety působí. Jak by se ale popisoval pohyb magnetů? Řešme zadanou úlohu s jedním upevněným magnetem a druhým, který se může volně otáčet. Opět můžeme využít představu s magnetickými náboji. Na obrázku k zadání vidíme, že severní pól upevněného magnetu je blíž k volnému magnetu. Můžeme proto soudit, že síly, kterými bude působit jižní pól pevně fixovaného magnetu na volný magnet, jsou menší než v případě severního pólu, a tak převládnou síly od severního. Jižní pól volného magnetu bude přitahován k severnímu pólu pevného, a naopak severní pól volného jím bude odpuzován. Ve výsledku tak vznikne moment síly a magnet se začne otáčet po směru hodinových ručiček (podle obrázku). V momentě, kdy oba magnety srovnají své magnetizace (jižní pól volného magnetu bude nejbliž ke druhému), výsledná magnetická síla už nebude mít točivý účinek, ale přesto se magnet setrvačností bude i dále otáčet. Ve chvíli, kdy bude volný magnet již otočen více než o devadesát stupňů, na něj začne působit moment síly na opačnou stranu, což povede ke zpomalování otáčení, jeho zastavení a nakonec obrácení směru otáčení. Magnet poté opět překoná rovnovážnou polohu. V ní na něj nepůsobí moment síly, znovu se změní směr působení momentu síly, což zase povede nejdříve ke zpomalování rotace a nakonec až k obrácení jejího směru. Tento proces se periodicky opakuje, a my tak o magnetu prohlašujeme, že kmitá.

3. V poslední části se podíváme už i na nějaké konkrétní výpočty. Snažíme se určit sílu, kterou na sebe působí dva stejné magnety s opačně orientovanými vektory magnetizace (podle obr. 2). Tento případ jsme již rozebrali výše, takže víme, že je třeba spočítat celkem čtyři síly působící mezi náboji. Úplně nejdříve však potřebujeme nalézt ony magnetické náboje (jejichž velikost je k našemu štěstí u obou stejná díky identičnosti obou magnetů). Ve Výučení si můžeme povšimnout, že u tyčového magnetu se dá magnetický náboj spočítat jako

$$\varphi = M\pi r^2.$$

Když známe náboj, můžeme se zaměřit na jednotlivé síly. Nejprve spočítejme ty přitažlivé, které působí na vzdálenost d . Mají stejnou velikost i směr a jsou právě dvě. Z toho můžeme usoudit, že celková přitažlivá síla bude rovna dvojnásobku síly, kterou na sebe působí kladný náboj jednoho magnetu a záporný druhého. Za využití výše uvedeného vzorce pro sílu mezi magnetickými náboji to znamená

$$F_p = \mu \frac{\varphi^2}{2\pi d^2}.$$

Tímto byla spočtena přitažlivá část síly mezi dvěma magnety (F_p). To ale není všechno, neboť z jisté části se magnety i odpuzují. Tato síla ale působí mezi horním koncem jednoho magnetu a dolním koncem druhého. Na obrázku můžete vidět, že vzdálenost mezi těmito konci je dle Pythagorovy věty $\sqrt{d^2 + l^2}$. Opět máme odpudivé síly dvě, mají stejnou velikost, ale už jiný směr! Tyto dílčí síly směřují vůči sobě šikmo, a musíme je proto složit jinak než jen pouhým součtem velikostí. Je docela zajímavé, že tím, že působí pod stejným sklonem vůči magnetu se stejnou velikostí, jen proti sobě, se vyruší vertikální složky (vůči orientaci obrázku) těchto sil, a jedinou roli tak budou hrát složky horizontální. Nyní tedy musíme rozložit sílu na horizontální a vertikální složku. Víme, že máme magnetickou sílu o velikosti

$$\frac{\mu}{4\pi} \frac{\varphi^2}{d^2 + l^2}.$$

Pokud má tato síla sklon α vůči vodorovné ose, její vodorovná složka bude odpovídat velikosti síly vynásobené hodnotou kosinu úhlu α .

$$\frac{\mu}{4\pi} \frac{\varphi^2}{d^2 + l^2} \cos \alpha$$

Takto se standardně rozkládají vektory. Co geometricky vyjadřuje $\cos \alpha$? Z definice této funkce plyne, že $\cos \alpha$ odpovídá poměru vzdálenosti severního pólu jednoho magnetu od jižního pólu druhého a vzdálenosti severních pólů magnetů. Matematicky jde o poměr

$$\cos \alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}}.$$

Dosazením vyjádření kosinu úhlu α do předchozího výrazu bychom dostali horizontální část odpudivé síly. Celková síla (F_o), která působí odpudivým účinkem, je pouze jejím dvojnásobkem (sčítáme příspěvky obou dvojic pólů).

$$F_o = 2 \frac{\mu}{4\pi} \frac{\varphi^2}{d^2 + l^2} \frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{d\varphi^2}{(d^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Zbývá už jen poslední krok, spočíst celkovou sílu F mezi magnety. Ta bude jednoduše rozdíl celkové přitažlivé a celkové odpudivé síly.

$$F = F_p - F_o = \mu \frac{\varphi^2}{2\pi d^2} - \frac{\mu}{2\pi} \frac{d\varphi^2}{(d^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu\varphi^2}{2\pi} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{d}{(d^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

V poslední řadě můžeme do vzorce dosadit již dříve spočtený magnetický náboj φ .

$$F = \frac{\pi}{2} \mu_0 M^2 r^4 \left(\frac{1}{d^2} - \frac{d}{(d^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Poznamenáváme, že za permeabilitu prostředí jsme dosadili hodnotu pro vakuum (μ_0), která je téměř stejná i pro vzduch. V zadání sice není určeno, v jakém prostředí se magnety nachází, ale lze předpokládat, že ve standardní atmosféře. A tímto je veškeré upravování rovnic hotové, zbývá pouze dosadit hodnoty ze zadání.

$$r = 0,5 \text{ cm} = 0,005 \text{ m}$$

$$l = 2 \text{ cm} = 0,02 \text{ m}$$

$$d = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

$$M = 1,5 \text{ T}/\mu_0$$

Jednotka magnetizace se může zdát trochu zvláštní, je totiž složená z jednotky *tesla* (T), což je mimo jiné základní jednotka magnetické indukce, a z permeability vakua. Vzhledem k tomu, že se permeabilita vyskytuje ve vzorci ještě jinde, je vhodné dosazovat magnetizaci v tomto tvaru, abychom mohli permeabilitu případně vykrátit.

$$F = \frac{\pi}{2} \mu_0 \cdot \frac{1,5^2 \text{ T}^2}{\mu_0^2} \cdot 0,005^4 \text{ m}^4 \cdot \left(\frac{1}{0,1^2 \text{ m}^2} - \frac{0,1 \text{ m}}{(0,1^2 \text{ m}^2 + 0,02^2 \text{ m}^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$F \doteq \frac{1,262 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{T}^2}{\mu_0}$$

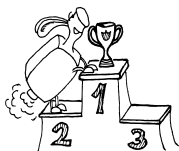
Bohužel i tak potřebujeme znát její hodnotu.

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{T}^2 \cdot \text{N}^{-1}$$

$$F \doteq \frac{1,262 \cdot 10^{-8} \text{ N}}{4\pi \cdot 10^{-7}} \doteq 0,01 \text{ N}$$

Ve finále jsme se dopracovali k výsledku, že magnety na sebe budou působit celkovou silou přibližně 0,01 N.

Michal Stroff
stroffis@vyfuk.org



Pořadí řešitelů po VI. sérii

Kategorie šestých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	VI	Σ
		5	5	6	6	7	7	7	43	258
1. <i>Vojtěch Reif</i>	ZŠ u sv. Štěpána Praha 2	5	5	3	—	—	7	2	22	88
2. <i>Valentýna Sochorová</i>	G, Olomouc-Hejčín	3	5	4	—	—	7	—	19	73
3. <i>Jan Foldyna</i>	Anglofonní základní škola, z. ú.	5	3	6	—	—	—	—	14	72
4. <i>Jakub Chum</i>	G Nad Štolou, Praha	5	5	—	—	—	7	—	17	57
5. <i>Tomáš Rataj</i>	ZŠ Stupkova, Olomouc	3	5	—	—	—	—	—	8	24

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	VI	Σ
		5	5	6	6	7	7	7	43	258
6. <i>Agáta Hušťavová</i>	European School Luxembourg II	–	–	–	–	–	–	–	–	21
7. <i>Antonín Papoušek</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	11
8. <i>Filip Němec</i>	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	3

Kategorie sedmých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	VI	Σ
		5	5	6	6	7	7	7	43	258
1. <i>Adam Houdek</i>	ZŠ a MŠ , Březová	4	5	6	6	5	6	7	39	177
2. <i>Matěj Křivánek</i>	ZŠ T. G. M. Mor. Budějovice	3	5	4	6	6	6	–	30	166
3. <i>Květa Bouchalová</i>	G, Olomouc-Hejčín	5	5	6	–	–	7	5	28	122
4. <i>Matěj Ondrušek</i>	ZŠ Horácké náměstí, Brno	5	2	–	6	–	7	–	20	104
5. <i>Bartoloměj Stoklásek</i>	ZŠ Troubelice	4	4	5	5	–	–	–	18	103
6. <i>Antonín Strída</i>	ZŠ a MŠ Lutín	5	5	–	–	–	–	–	10	77
7. <i>Jáchym Turner</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	69
8. <i>Klára Valentová</i>	ZŠ Hálkova, Olomouc	5	1	3	–	–	3	3	15	53
9. <i>Jáchym Šleška</i>	ZŠ Haškova, Nišov	4	5	–	–	–	–	–	9	49
10. <i>Eliška Knopfová</i>	ZŠ J. A. Kom. Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	–	45
11. <i>Hana Bayerová</i>	ZŠ Brno, Sirotkova 36	4	5	–	–	–	–	–	9	42
12. <i>Emma Burešová</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	39
13.–15. <i>Matyáš Churavý</i>	EKO G, Brno	5	1	–	–	–	2	–	8	34
13.–15. <i>Šimon Novák</i>	Nový PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	34
13.–15. <i>Daniel Stražil</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	34
16. <i>Klára Zíková</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	1	1	–	–	–	–	–	2	33
17. <i>Kateřina Zubálová</i>	ZŠ Stupkova, Olomouc	5	4	–	–	–	–	–	9	27
18. <i>Dmitrij Petrecký</i>	Fakultní ZŠŠ PedF UK Praha 13	–	–	–	–	–	–	–	–	26
19. <i>Mikuláš Glozar</i>	ZŠ Masarova, Brno	3	–	–	–	–	–	–	3	23
20.–21. <i>Tereza Stražilová</i>	ZŠ Brno, Sirotkova 36	–	–	–	–	–	–	–	–	20
20.–21. <i>Matylda Svobodová</i>	ZŠ Novoměstská, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	20
22. <i>Sofie Desnicová</i>	G, Litovel	–	–	–	–	–	–	–	–	17
23. <i>Martin Maláč</i>	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	16
24.–26. <i>Erik Hojgr</i>	ZŠ Hálkova, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	15
24.–26. <i>Lukáš Lizůch</i>	Masarykovo G, Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	–	15
24.–26. <i>Alexandra Sochorová</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	15
27. <i>Beáta Mudráková</i>	ZŠ a MŠ Husova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	13
28. <i>Matěj Illner</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	10
29.–30. <i>Sari Attar</i>	ZŠ a MŠ Praha 5 - Hlubočepy	–	–	–	–	–	–	–	–	8
29.–30. <i>Ondřej Kulháněk</i>	FZŠ prof. O. Chlupa, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	8
31. <i>Marek Šoltés</i>	ZŠ Svážná, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	7
32. <i>Václav Prachař</i>	G, Omská, Praha	3	3	–	–	–	–	–	6	6
33. <i>Sofia Husáková</i>	Soukromá ZŠ UNIVERZUM s.r.o. Pra	–	–	–	–	–	–	–	–	5
34. <i>Josef Povolný</i>	ZŠ Školní ul., Hrádek nad Nisou	–	–	–	–	–	–	–	–	4

Kategorie osmých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	VI	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	228
1. <i>Jana Feldbabelová</i>	ZŠ Jemnice	–	5	6	6	7	7	7	38	197
2. <i>Sámo Šatánek</i>	ZŠ a MŠ Telecí	–	5	6	6	7	6	7	37	196
3. <i>Max Menčík</i>	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	–	5	6	6	2	7	7	33	191
4. <i>Petr Barták</i>	Slovanské G, Olomouc	–	5	6	–	–	6	5	22	94

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	VI	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	228
5. Juraj Štefina	ZŠ sv. Margity Púchov	–	5	6	5	–	5	–	21	91
6. Dominik Kudr	ZŠ a MŠ Studenec	–	5	–	–	–	3	4	12	89
7. Matěj Knop	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	6	–	–	5	–	16	81
8. Aneta Mičulková	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	5	6	–	–	7	–	18	80
9. Josef Eliáš Formánek	G, Křenová, Brno	–	5	6	5	–	6	–	22	79
10. Patrik Piňos	ZŠ Gajdošova, Brno	–	5	4	–	–	3	–	12	76
11. Filip Borkovec	G, Křenová, Brno	–	3	–	–	–	–	–	3	72
12. Ondřej Bohatý	G Opatov, Praha	–	5	6	6	–	–	–	17	67
13. Josef Turek	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	–	53
14. Julie Krčmařová	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	–	–	–	–	–	5	49
15. Alžběta Sochorová	G, Blovice	–	–	–	–	–	–	–	–	32
16. Karolína Kačalková	ŠpMNDaG, Bratislava	–	5	–	–	–	–	–	5	30
17. Zuzana Kýřová	ZŠ nám. Svornosti, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	27
18.–20. Filip Andráš	G, Křenová, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	26
18.–20. Tomáš Čanda	ZŠ J. A. Komenského Blatná	–	–	–	–	–	–	–	–	26
18.–20. Kateřina Hujová	G, Voděradská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	26
21.–22. Magdaléna Krížová	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	–	–	–	–	–	–	–	–	25
21.–22. Šimon Václavík	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	25
23. Linda Rokosová	G, Jihlava	–	5	–	–	–	–	–	5	23
24.–25. Aleš Antoň	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	21
24.–25. Adam Jurtík	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	21
26. Štěpán Zajačik	ZŠ Školní, Chomutov	–	–	–	–	–	–	–	–	19
27. Matěj Purkert	G, Písnická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	18
28.–29. Michaela Chovancová	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	17
28.–29. Lucie Kohoutková	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	17
30.–31. Lukáš Hobza	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	16
30.–31. Renata Petlanová	ZŠ Mendelova, Praha 4 - Jižní Mě	–	–	–	–	–	–	–	–	16
32. Filip Procházka	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	15
33.–34. Vít Foltas	ZŠ a MŠ Spálov	–	–	–	–	–	–	–	–	14
33.–34. Patrik Hrebínek	ZŠ Na Příkopech, Chomutov	–	–	–	–	–	–	–	–	14
35.–38. Marek Petlan	ZŠ Mendelova, Praha 4 - Jižní Mě	–	–	–	–	–	–	–	–	13
35.–38. Erik Rössler	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	13
35.–38. Tereza Vargová	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	13
35.–38. Tímotej Vašina	ZŠ a MŠ Bílá, Praha 6	–	–	–	–	–	–	–	–	13
39. Valerie Labuťová	G, Nový Bydžov	–	–	–	–	–	–	–	–	10
40. Jakub Brázda	ZŠ Politických vězňů, Slaný	–	–	–	–	–	–	–	–	8
41.–44. Tomáš Dolanský	G Týn nad Vltavou	–	–	–	–	–	–	–	–	6
41.–44. Marína Kiliánová	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	6
41.–44. Eva Kundratová	ZŠ Komenského II Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	6
41.–44. Jiří Zakuťanský	G, Šternberk	–	–	–	–	–	–	–	–	6
45. Lukáš Kulhánek	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	2

Kategorie devátých ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	VI	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	228
1. Matej Karpáč	ZŠ Jána Švermu, Humenné	–	5	6	6	7	6	6	36	202
2. Kosma Šatánek	ZŠ a MŠ Telecí	–	5	6	6	6	6	5	34	180
3. Matěj Šebesta	Masarykovo G, Vsetín	–	5	4	6	4	7	4	30	154
4. Natálie Lászlóová	Wichterlovo G, Ostrava	–	5	4	6	6	7	3	31	145
5. Martin Vagner	G, Voděradská, Praha	–	4	6	5	–	7	2	24	137
6. Ondřej Porod	G Týn nad Vltavou	–	5	6	6	–	4	–	21	135

jméno Student	Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	VI	Σ
			5	6	6	7	7	7	7	38	228
7.	Alena Mouchová	G, Český Krumlov	–	5	6	5	1	7	3	27	132
8.	Míla Tomášová	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	122
9.	Michaela Urbanová	G F. X. Šaldy, Liberec	–	5	3	6	4	7	3	28	118
10.	Monika Dlouhá	G Matyáše Lercha, Brno	–	4	6	–	2	4	4	20	117
11.	Martin Motýčka	ZŠ Nad Vodovodem, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	–	80
12.	Marek Opluštil	G, Litovel	–	5	–	–	–	–	–	5	76
13.–14.	Lucie Endlová	G O. Havlové, Ostrava	–	5	6	5	–	–	–	16	73
13.–14.	Antonín Plašil	G Dobruška	–	5	6	–	4	–	–	15	73
15.	Filip Gašparín	Wichterlovo G, Ostrava	–	3	–	–	–	7	4	14	68
16.	Jan Motlík	G Opatov, Praha	–	5	4	6	–	–	–	15	67
17.	Denis Petka	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	–	62
18.	Ondřej Pavelka	ZŠ a MŠ Pňovice, Litovel	–	5	6	–	–	7	2	20	55
19.	David Laušman	G Opatov, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	54
20.	Ondřej Kočur	Wichterlovo G, Ostrava	–	5	0	–	–	–	–	5	51
21.	Filip Groh	ZŠ Liberec 10	–	–	–	–	–	–	–	–	50
22.	Petra Prknová	ZŠ Jemnice	–	–	–	–	–	–	–	–	49
23.–24.	Vít Kubal	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	46
23.–24.	Tereza Kubínová	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	46
25.–26.	Kristýna Otevřelová	ZŠ Brno, Sirotkova 36	–	5	–	–	–	–	–	5	42
25.–26.	Ondřej Zapletal	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	42
27.	Vojtěch Černý	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	41
28.	Klaudie Zemene	G a ZUŠ, Šlapanice	–	–	–	–	–	–	–	–	39
29.	Adam Ciešlar	ZŠ Divišov	–	5	–	6	–	–	–	11	37
30.	Klára Hašová	G, Křenová, Brno	–	5	–	–	–	–	–	5	35
31.–32.	Michael Ambros	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	34
31.–32.	David Manhalter	EKO G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	34
33.	Jan Hrubec	OPEN GATE Říčany	–	–	–	–	–	–	–	–	33
34.–36.	Mikuláš Hořenek	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	32
34.–36.	Jana Pohořílská	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	32
34.–36.	Vlasta Suchá	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	32
37.	Natálie Jochová	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	31
38.	Anežka Krčmová	ZŠ Brno, Sirotkova 36	–	–	–	–	–	–	–	–	29
39.–40.	Jana Fišerová	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	26
39.–40.	Pavel Zachariáš	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	–	26
41.	Ondřej Rejman	ZŠ s RVMPP, Teplice, Buzulucká	–	–	–	–	–	–	–	–	25
42.	Leonard Lindvay	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	21
43.–45.	Max Denemarek	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	19
43.–45.	Pavína Jurásková	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	19
43.–45.	Šimon Klousek	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	19
46.–47.	Martin Landík	G Ústavní, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	17
46.–47.	Julie Vlčanová	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	–	3	–	–	–	–	–	3	17
48.–51.	Vojtěch Kužilek	ZŠ Heyrovského, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	16
48.–51.	Nicol Plšková	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	–	16
48.–51.	Petra Šilerová	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	16
48.–51.	Vítek Vácha	ZŠ a MŠ Wolkerova, Havl. Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	16
52.	Natálie Manoušková	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	15
53.–56.	Šimon Hanák	Cyrlomet. G a SOŠ pg., Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	14
53.–56.	Kevin Nguyen	ZŠ Chomutovská, Kadaň	–	–	–	–	–	–	–	–	14
53.–56.	Jakub Štěpánek	ZŠ Nad Vodovodem, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	–	14
53.–56.	Petr Vaško	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	14
57.	Josef Hugo Holub	ZŠ Gajdošova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	13
58.–59.	Jan Herzig	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	12

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	VI	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	228
58.–59. <i>Emá Vondráčková</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	4	–	–	–	–	–	4	12
60. <i>Julie Svobodová</i>	ZŠ Chomutovská, Kadaň	–	–	–	–	–	–	–	–	11
61. <i>Barbora Barnatová</i>	ZŠ s RVMPP, Teplice, Buzulucká	–	–	–	–	–	–	–	–	7
62.–63. <i>Lenka Hromádková</i>	G, Hlinsko	–	–	–	–	–	–	–	–	6
62.–63. <i>Klára Souza de Jooe</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	6
64. <i>Marek Hromada</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	5
65.–66. <i>Marie Steinhäuserová</i>	ZŠ Strmilov	–	–	–	–	–	–	–	–	3
65.–66. <i>Šimon Tureček</i>	G, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	–	3
67. <i>Štěpán Železný</i>	ZŠ Hamry, Brno	–	0	–	–	–	–	–	0	1
68.–69. <i>Mikoláš Palouda</i>	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	0
68.–69. <i>Štěpán Petr</i>	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	0



Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <https://vyfuk.org>
e-mail: vyfuk@vyfuk.org



/ksvyfuk



@ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.