

Úloha V.2 ... Zajímavá čísla

5 bodů; průměr 4,08; řešilo 25 studentů

Kačka měla řadu náhodných trojčíslicových čísel a protože neměla co dělat, začala je blíže zkoumat. Všimla si, že hodně těchto čísel je zajímavých. Zajímavé číslo je pro Kačku takové, které má právě dvě cifry stejné. Kolik procent takových čísel bude? Jak se situace změní, když bude Kačka sledovat zajímavost poslední trojice pěticičíslicového čísla?

Na chvíli zapomeňme, že na začátku našeho *zajímavého* čísla musí být cifra různá od nuly. Potom máme 10 možností jak zvolit první cifru, která se v čísle vyskytuje dvakrát, a 9 možností jak zvolit druhou cifru. Pro každou z těchto $10 \cdot 9 = 90$ kombinací cifer existují tři uspořádání, která vytvoří navzájem různá čísla (cifru, která se v čísle vyskytuje jen jednou, můžeme umístit na první, druhé nebo třetí místo). Celkem jsme tedy vytvořili 270 čísel, z nichž ovšem některá nejsou trojčíslicová, neboť začínají nulou.

Kolik takových čísel se mezi našimi 270 čísly nachází? Uvažme všechny možnosti. Navíc jsme započítali čísla, která začínají nulou a případně obsahují ještě jednu další nulu. Čísel, která začínají jednou nulou, a pak už žádnou další nulu neobsahují, je 9 (druhá a třetí cifra může být 1 až 9). Čísel obsahujících dvě nuly je $9 \cdot 2 = 18$ (druhou cifru můžeme vybrat opět devíti způsoby a umístit ji na druhé nebo třetí místo). Dohromady tedy existuje $270 - 18 - 9 = 243$ *zajímavých* čísel vyhovujících všem požadavkům v zadání. Víme, že trojčíslicových čísel je $999 - 99 = 900$. *Zajímavých* čísel je tudíž mezi trojčíslicovými čísly

$$\frac{243}{900} = \frac{27}{100},$$

což odpovídá 27%.

Pokud bychom chtěli zkoumat poslední trojčíslí pěticičíslicových čísel, tak nás nemusí trápit případy s nulou. Už víme, že v takovém případě máme 270 různých *zajímavých* trojčíslí, kterými může pěticičíslicové číslo končit. Pro každé takové zakončení může být první dvojčíslí libovolné přirozené číslo z intervalu 10 až 99. Celkem tedy existuje $270 \cdot (99 - 9) = 24\,300$ navzájem různých pěticičíslicových čísel, jejichž poslední trojčíslí je *zajímavé*. Jelikož pěticičíslicových čísel je dohromady $99\,999 - 9\,999 = 90\,000$, platí, že mezi pěticičíslicovými čísly je

$$\frac{24\,300}{90\,000} = \frac{27}{100} \text{ čísel,}$$

která mají zajímavé poslední trojčíslí, což odpovídá opět 27%.

Jiný způsob řešení spočívá v uvědomění si, že nám vlastně nezáleží na tom, jestli je číslo pěticičíslicové nebo osmdesáticičíslicové, neboť je zkrátka zajímavé jen o tu poslední trojici číslic. Výpočet pro ně jsme vlastně udělali hned na začátku první části.

Viktor Materna
materna@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.