

Úloha IV.V ... Fotonická plachetnice

7 bodů; průměr 5,00; řešilo 15 studentů

Zkusme si na chvíli představit, že se nám energetickou a environmentální krizi podaří úspěšně překonat. Přenesme se do budoucnosti, ve které má lidstvo k dispozici vyspělé technologie a prakticky neomezené množství energie, a zkusme se zamyslet, jak by mohla vypadat fotonická plachetnice s lidskou posádkou.

1. Mějme fotonickou plachetnici s hmotností (vč. plachty) $m = 2000 \text{ t}$, která se pohybuje rychlostí $0,2 \text{ c}$. Jakou má tato plachetnice (relativistickou) kinetickou energii? Jak by nejspíš dopadla planeta, ke které by mířila, kdyby se ji nepodařilo zabrzdit? Doporučujeme srovnání s jaderným výbuchem přes ekvivalent TNT.
2. Nyní již počítejme pro jednoduchost nerelativisticky. Plachetnici urychlujeme konstantní silou po vzdálenost s . Odvoďte vztah pro rychlost plachetnice v na konci urychlování. Tato rychlost bude záviset na velikosti působící síly F a hmotnosti plachetnice m (najděte obecný vztah mezi veličinami, nepočítejte s konkrétními číselnými hodnotami jako v minulém příkladě). Počáteční rychlost plachetnice je nulová.
3. Uvažujme laser o výkonu P . Jaká síla bude na plachetnici působit v závislosti na tomto výkonu? Náповěda: Zkuste upravit vztah ve Výfučení. energii jednoho fotonu spočítáme jako $E = hc/\lambda$.
4. Mějme laser o výkonu $P = 10 \text{ PW}$, který fotonickou plachetnici dokáže efektivně urychlovat až na vzdálenost $s = 10 \cdot 10^{11} \text{ km}$. Jakou rychlost plachetnice získá? Za jak dlouho doletí k našemu nejbližšímu hvězdnému sousedovi?

1. Relativistickou kinetickou energii spočítáme dosazením hodnot uvedených v zadání do vzorce, který se objevil ve Výfučení.

$$E = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) mc^2$$

$$E = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0,2^2}} - 1 \right) \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot (2,998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2$$

$$E \doteq 3,71 \cdot 10^{21} \text{ J}$$

Abychom získali lepší představu o tom, jak nepředstavitelně velké toto množství energie je, porovnáme jej nejprve s výbuchem plutoniové jaderné pumy Fat Man, která byla svržena na Nagasaki. Hodí se vědět, že při jejím výbuchu se uvolnila energie E_1 odpovídající výbuchu $22\,000 \text{ t TNT}$ a že při výbuchu jedné tuny TNT se uvolní energie $E_{\text{tTNT}} = 4,184 \text{ GJ}$. Dostaneme tedy následující koeficient:

$$k = \frac{E}{E_1} = \frac{3,71 \cdot 10^{21} \text{ J}}{22\,000 \text{ t} \cdot 4,184 \text{ GJ} \cdot \text{t}^{-1}} \doteq 40\,000\,000 = 4 \cdot 10^7.$$

Na první pohled je vidět, že při dopadu by se uvolnilo o mnoho řádů více energie než při svržení jaderné pumy na Japonsko. Dopad nelze srovnávat ani s výbuchem Car-bomby, nejsilnější termonukleární pumy, která kdy byla odpálena. Při dopadu by se totiž uvolnilo asi jen o dva řády méně energie než při dopadu asteroidu, o kterém se spekuluje, že vyhubil dinosaury. Dá se tedy předpokládat, že by byl dopad fotonické plachetnice uvedených parametrů pro cílovou planetu skutečně devastující. Nejspíš by ovlivnil podmínky na jejím povrchu v globálním měřítku na dlouhé dekády. Naše plachetnice tak v mnohém připomíná spíše ultimátní zbraň totální planetární destrukce a je otázkou, nakolik by bylo rozumné ji nasměrovat na potenciálně obydlený svět.

2. Rychlost plachetnice v na konci urychlování bude součin zrychlení a a času t , po který bude plachetnice urychlována. Také víme, že pro dráhu tohoto rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu platí vztah $s = at^2/2$. A konečně zrychlení si také můžeme vyjádřit jako podíl působící síly F a hmotnosti plachetnice. Hledaný vztah dostaneme dosazením do těchto elementárních vztahů pro pohyb a sílu po následném vyjádření rychlosti:

$$\begin{aligned} v &= at \\ v^2 &= a^2 t^2 \\ v^2 &= a \cdot 2s \\ v^2 &= \frac{2Fs}{m} \\ v &= \sqrt{\frac{2Fs}{m}}. \end{aligned}$$

3. Celkový výkon laseru P získáme vynásobením energie jednoho fotonu E_0 počtem fotonů, který dopadne na povrch plachty fotonické plachetnice za jednu sekundu. Tento počet jsme si už ale ve Výfučení vyjádřili jako součin plošné hustoty dopadajících fotonů n a plochy plachty S .

$$P = \frac{hc}{\lambda} nS$$

Všimněme si, že se tento vztah nápadně podobá vztahu pro sílu ve Výfučení, který jsme měli upravit. Konkrétně vidíme, že podíl veličin hSn/λ si nyní můžeme vyjádřit jako P/c . Po dosazení dospějeme k překvapivě velmi jednoduchému a elegantnímu vztahu pro sílu ve tvaru

$$F = \frac{2P}{c}.$$

Protože c je konstanta, můžeme si být jisti, že už se nám jej více zjednodušit nepodaří.

4. Ve druhém a třetím úkolu jsme si připravili důležité vztahy pro rychlost plachetnice v závislosti na její hmotnosti, působící síle a vzdálenosti, po které síla působí. Teď se nám podařilo si vyjádřit sílu v závislosti na výkonu laseru. Když tento poslední vztah dosadíme do vztahu pro rychlost, dostaneme přesně ten vzorec, který potřebujeme pro výpočet rychlosti v závislosti na konkrétních zadaných veličinách. Dosadíme do něj konkrétní hodnoty a dopočítáme výslednou rychlost fotonické plachetnice.

$$v = \sqrt{\frac{4Ps}{mc}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10 \cdot 10^{15} \text{ W} \cdot 10 \cdot 10^{14} \text{ m}}{2 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot 2,998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}} \doteq 2,58 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Vyšla nám hodnota odpovídající asi 85 % rychlosti světla. Je tedy potřeba si uvědomit, že skutečná hodnota by se kvůli relativistickým jevům od té, co jsme spočítali, podstatně lišila. Na druhou stranu nám celou dobu nešlo ani tak o spočítání přesného čísla, jako spíš o ověření toho, jestli existuje kombinace parametrů, která nám umožní urychlit fotonickou plachetnici s lidskou posádkou až na rychlost blízkou rychlosti světla. To se nám podařilo.

Na závěr zbývá provést výpočet doby letu k nejbližší hvězdě – Proximě Centauri. Ta je od Sluneční soustavy vzdálená 4,22 ly. Vypočítanou rychlostí by k ní tedy let trval přibližně $t = 4,22 \text{ ly} / (0,86 c) \doteq 5 \text{ let}$. Pro posádku plachetnice by však takový let trval kvůli relativistickým jevům asi poloviční dobu.

Viktor Materna
materna@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.