

Úloha IV.5 ... Milionářská párty

7 bodů; průměr 6,58; řešilo 19 studentů

Robertovi se podařilo vyhrát v soutěži Milionář, aniž by znal jedinou správnou odpověď (musel tipovat). Za výhru uspořádal velkou párty v bazénu. Rozlil hostům poslední jahodový mošt ze skleněné lahve válcového tvaru o objemu $V = 11$, jejíž stěny mají zanedbatelnou tloušťku, když ho v tu chvíli napadlo, že ji může využít k fyzikálnímu experimentu.

Zavřel lahev a ponořil se ke dnu bazénu, jehož hloubka je $h = 2$ m.

1. Jaká vztlačková síla působila na plně ponořenou lahev? Měnila se tato síla s hloubkou?
2. Jak velký hydrostatický tlak pocitovala lahev na dně bazénu?
3. Robert pak držel hrdlo lahve směrem dolů a lahev otevřel tak, že z ní neunikl žádný vzduch, ale natekla do ní voda. Jaký objem vody natekl do lahve?

Předpokládejte, že vzduch v lahvi zůstane při stejné teplotě, protože voda přebytné teplo odvede. Atmosférický tlak je za normálních podmínek roven $p_A = 101\,325$ Pa.

Nápověda: Může vám pomoci stavová rovnice ideálního plynu. Ta dává do vztahu tlak p , objem plynu V a jeho teplotu T :

$$\frac{pV}{T} = nR,$$

kde n je látkové množství plynu v molech a R je molární plynová konstanta. Pokud se teplota plynu při ději nemění, je součin $pV = \text{konst}$, a je tedy na začátku děje stejný jako na jeho konci.

1. Vzorec pro výpočet vztlačkové síly získáme ze známé Archimedovy poučky: velikost síly, která nadnáší těleso, se rovná velikosti tíhové síly, která působí na kapalinu o objemu, který je stejný jako objem ponořené části tělesa. V naší úloze je lahev celá ponořená ve vodě, hledaná síla tedy má stejnou velikost jako tíhová síla působící na vodu o objemu $V = 11$.

$$F_{vz} = mg$$

$$F_{vz} = V\rho g \doteq 9,8 \text{ N},$$

kde $\rho \doteq 1\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je hustota vody. Dokud je lahev ponořená celá, síla není hloubkou nijak ovlivňována (už samotná Archimedova poučka hloubku nijak nezmiňuje).

2. Vztah pro výpočet hydrostatického tlaku si můžeme buď najít v tabulkách, nebo použijeme jednoduchou úvahu: na těleso tlačí svou tíhou vodní sloupec, který se nachází nad tělesem. Výška sloupce je pak rovna hloubce h , ve které je naše těleso, a sloupec má stejný vodorovný průřez jako těleso, označme ho S . Voda pak na lahev působí silou:

$$F = mg = hS\rho g.$$

Když si uvědomíme, že tlak je síla vztažená na jednotku plochy, tak dostaneme vztah, který nalezneme v tabulkách.

$$p = h\rho g \doteq 19,6 \text{ kPa}$$

Tato argumentace obsahuje jednu důležitou nepřesnost – nevíme nic o tvaru ani prostorové orientaci lahve. Vzhledem k tomu, že povrch lahve je pokrivený, nachází se jednotlivé body

povrchu v různé hloubce a působící síla pak není $F = hS\rho g$. V naší úloze tento problém můžeme ignorovat, protože zadání se nás v podstatě ptá na hydrostatický tlak v hloubce h , a to náš vzorec popisuje správně.

3. Vyjdeme ze stavové rovnice pro ideální plyn:

$$pV = nRT.$$

Žádný vzduch z láhve neunikl a teplota vzduchu se rovněž nezměnila, proto jediné veličiny, co se změní, jsou objem V a tlak p . Nad hladinou bazénu pociťoval vzduch v lahvi pouze atmosférický tlak a už jsme spočítali, že pod vodou je tlak větší, neboť tam přibude navíc hydrostatický tlak. Zůstává otázka, jak ho započítat. K tomu použijeme stejný argument, jako v předchozí úloze – atmosférický tlak je způsoben tíhou sloupce vzduchu nad námi, při výpočtu síly F tedy sčítáme tíhu vzduchu a vody. Dělením síly plochou dostaneme, že výsledný tlak pod vodou je roven součtu atmosférického a hydrostatického tlaku. Stavová rovnice popisující vzduch v lahvi pod vodou tedy má tvar:

$$(p_A + p)V_2 = nRT.$$

Ale řekli jsme, že n a T (a samozřejmě ani R jakožto molární plynová konstanta) se nemění a nad hladinou byl tlak $p_A = 101 \text{ kPa}$ a objem $V = 1 \text{ l}$, proto je:

$$(p_A + p)V_2 = p_A V$$

$$V_2 = \frac{p_A}{p + p_A} V.$$

Objem vzduchu se tedy zmenšil o $\Delta V = V - V_2$ a právě tento uvolněný objem zaplnila voda. Výsledek tedy je:

$$\Delta V = V - \frac{p_A}{p + p_A} V$$

$$\Delta V = \frac{h\rho g}{h\rho g + p_A} V = 0,161.$$

Jiří Kohl
jirkak@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.