

Úloha III.4 ... Hodiny se šiškami a kukačkou

6 bodů; průměr 4,93;

řešilo 15 studentů

Viktor má na chatě hodiny se čtyřmi šiškami, z nichž každá váží $m = 0,5 \text{ kg}$. Jak dlouho po natažení budou hodiny fungovat, pokud mohou obě šišky klesnout až o $l = 1 \text{ m}$ a pro pohon hodin je použitelných 20 % potenciální energie šišek? Hodiny mají hodinovou ručičku dlouhou 6 cm a vážící 15 g, minutovou ručičku dlouhou 7 cm a vážící 10 g a konečně sekundovou ručičku, která měří 8 cm a váží 5 g.

Ručičky hodin považujte za homogenní zanedbatelně tenké tyče a předpokládejte, že hodinový strojek na ně působí pouze během jejich pohybu od šestky ke dvanáctce. Také pro jednoduchost můžete učinit odhad, že během 12 hodin spotřebávají ručičky energii lineárně. Hodiny Viktor natáhne přesně v poledne.



Problém budeme řešit ve třech krocích. Nejprve spočítáme využitelnou potenciální energii šišek E . Potom si spočítáme práci W , kterou je potřeba vykonat na provoz hodin během jednoho oběhu velké ručičky. Nakonec využitelnou energii vydělíme potřebnou prací, abychom zjistili, kolikrát stihne velká ručička oběhnout ciferník. Samozřejmě by šlo potřebnou práci vztáhnout k libovolně dlouhému časovému úseku. Výpočet s dvanácti hodinami má tu výhodu, že budeme pracovat pouze s celočíselnými násobky počtu oběhů jednotlivých ručiček.

Celkové množství využitelné potenciální energie spočítáme tak, že vynásobíme potenciální energii E_0 jedné šišky počtem šišek a následně výsledek vynásobíme koeficientem účinnosti η .

$$E = 4\eta E_0 = 4\eta mgh.$$

Výpočet práce W je o něco komplikovanější. Musíme pro každou ručičku přičíst součin počtu oběhů během dvanácti hodin n_k , její délky l_k , její hmotnosti m_k a tíhového zrychlení g . (V první části oběhu koná práci tíhová síla, takže se energie šišek spotřebuje pouze na přesun ručičky z nejnižšího bodu do nejvyššího, a tomu odpovídá právě rozdíl potenciální energie $m_k l_k g$.) Ručičky číslujeme od nejkratší po nejdelší. Dostáváme tak vztah:

$$W = (1l_1m_1 + 12l_2m_2 + 12 \cdot 60l_3m_3)g.$$

Zbývá vyjádřit počet otáček hodinové ručičky x , dosadit konkrétní hodnoty ze zadání a dopočítat se k hodnotě x .

$$x = \frac{E}{W} = \frac{4\eta mh}{l_1m_1 + 12l_2m_2 + 12 \cdot 60l_3m_3},$$

$$x = \frac{4 \cdot 0,2 \cdot 0,5 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m}}{0,06 \text{ m} \cdot 0,015 \text{ kg} + 12 \cdot 0,07 \text{ m} \cdot 0,01 \text{ kg} + 12 \cdot 60 \cdot 0,08 \text{ m} \cdot 0,005 \text{ kg}} \doteq 1,35.$$

Hodinová ručička stihne urazit 1,35 otáčky, hodiny se tedy zastaví přibližně za 16 hodin.

Pro zajímavost: kdyby na hodinách chyběla sekundová ručička (což je obvyklý případ), hodiny by se zastavily až po více než třech týdnech.

Je dobré si všimnout, že nám tíhové zrychlení v konečném výsledku nehraje roli, takže můžeme prohlásit, že výsledek je na tíhovém zrychlení nezávislý. To je jedna z pěkných vlastností

obecných řešení a dobrý důvod, proč je preferovat před průběžným dosazováním konkrétních hodnot.

Viktor Materna
materna@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.