

Úloha III.2 ... Mozková smrt

5 bodů; průměr 4,79; řešilo 34 studentů

V kuchyni na Výfučím táboře se kuchařky rozhodly, že si uspořádají filmovou noc velmi špatných filmů. Tak špatných, že při jejich sledování umírají mozkové buňky. Na začátku měla každá ze 4 přítomných organizátorek 100 000 000 000 mozkových buněk. Nejprve se promítal film dlouhý 35 minut s poločasem rozpadu mozkových buněk 5 minut a 50 sekund. Následoval film dlouhý 27 minut s poločasem rozpadu 2 minuty a 42 sekund, film dlouhý 55 minut s poločasem rozpadu 9 minut a 10 sekund, film dlouhý 39 minut s poločasem rozpadu 3 minuty a 15 sekund a na závěr si v kuchyni pustily film dlouhý 62 minut s poločasem rozpadu 15 minut a 30 sekund.

Zůstane na konci filmové noci v kuchyni dohromady alespoň jedna mozková buňka, kterou by kuchařky mohly sdílet?

Vzhledem k tomu, že se ptáme na to, kolik mozkových buněk budou mít nakonec organizátorky dohromady, můžeme si představit, že na počátku mají jen jeden mozek, který obsahuje:

$$4 \cdot 100\,000\,000\,000 = 400\,000\,000\,000 \text{ buněk.}$$

Dále se ptáme, kolikrát se počet mozkových buněk našich kuchařek zmenší na polovinu. Tím pádem nás zajímá hodnota x ve výrazu:

$$x = 400\,000\,000\,000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots$$

Jednou polovinou počet buněk vynásobíme y -krát. Když násobíme několikrát jedním číslem, využíváme mocniny, můžeme tedy x vyjádřit jako:

$$x = 400\,000\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y.$$

Stačí nám tedy vypočítat koeficient y a získáme i náš chtěný výsledek x . Připomeňme si, že y nám udává, kolikrát se počet mozkových buněk „zpolovičatí“. Pro tento výpočet jsme si v zadání zavedli „poločas rozpadu mozkových buněk“. Poločas rozpadu je běžná veličina – udává čas, za který ke „zpolovičatění“ dojde. Má tedy jako základní jednotku sekundu. Setkáváme se s ním i v přírodě, například u problematiky radioaktivních rozpadů (tam se děje to, že z N částic projde za poločas rozpadu radioaktivní proměnou průměrně $N/2$ částic).

Důležité je se zmínit, že neplatí, že by se v jeden moment (vždy po uplynutí poločasu rozpadu) rozpadlo $N/2$ částic nebo mozkových buněk najednou. Rozpady se dějí postupně, ke změnám počtů buněk dochází, i pokud neuběhla ani jedna celá doba poločasu rozpadu. Jednoduchou úvahou si můžete ověřit, že musí platit: $y = T/T_{\text{rozpad}}$, kde T je celkový čas, po který k rozpadům dochází, a T_{rozpad} samotný poločas rozpadu.

Platí, že:

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5,$$

kde y je celkový počet proběhlých poločasů rozpadu, y_1 je počet rozpadů během prvního filmu, y_2 během druhého filmu atd. Protože jsme se již dozvěděli, že $y = T/T_{\text{rozpad}}$, můžeme vyjádřit každé y na pravé straně rovnice:

$$y = \frac{T_1}{T_{\text{rozpad } 1}} + \frac{T_2}{T_{\text{rozpad } 2}} + \frac{T_3}{T_{\text{rozpad } 3}} + \frac{T_4}{T_{\text{rozpad } 4}} + \frac{T_5}{T_{\text{rozpad } 5}}.$$

A do této rovnice již jen dosadíme (musíme si dávat pozor na jednotky – v tomto případě jsme dosazovali v sekundách):

$$y = \frac{35 \cdot 60}{5 \cdot 60 + 50} + \frac{27 \cdot 60}{2 \cdot 60 + 42} + \frac{55 \cdot 60}{9 \cdot 60 + 10} + \frac{39 \cdot 60}{3 \cdot 60 + 15} + \frac{62 \cdot 60}{15 \cdot 60 + 30},$$

$$y = 6 + 10 + 6 + 12 + 4 = 38.$$

Počet buněk se tedy sníží na polovinu $38\times$ (náš vzoreček pro rozpad ovšem platí i pro necelý počet rozpadů), a tak nám stačí pro zjištění počtu zbylých buněk jen dosadit do původního vzorce:

$$x = 400\,000\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y,$$

$$x = 400\,000\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{38} \doteq 1,455.$$

V kuchyni tedy zbude 1,455 buňky, a tak i po skončení sledování budou kuchařky mít stále alespoň tu jednu buňku, kterou mohou sdílet mezi celou kuchyní!

Musíme však zmínit, že by tak připadalo asi 0,364 buňky na osobu. Ve skutečnosti se nám ale nemohou ničit buňky po částech. Toto číslo nám tedy říká jen jakousi pravděpodobnost, s jakou se bude daná buňka v hlavě organizátorů nacházet. Zároveň je však přesný výpočet takovéto pravděpodobnosti náročný a nad rámec této úlohy, takže jej opomeneme.

Václav Verner

vasek@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.