

Úloha VIII.3 ... Koloběh vody

10 bodů; průměr 4,86; řešilo 37 studentů

Pokuste se odhadnout, jaké množství vody jste již stihli za celý svůj život vypít nebo přijmout z jiných zdrojů (třeba z ovoce). Jaká je pravděpodobnost, s ohledem na celkové množství vody na Zemi, že ve sklenici vypijete molekulu vody, kterou jste již dříve vypili? Odhady provádějte odborně, podložte je výpočty a nezapomeňte uvést zdroje či zjednodušující předpoklady.



Dříve, než se pustíme do řešení této úlohy, je důležité si uvědomit, co vůbec znamená, že máme něco odhadnout. Množství vody v litrech, které jsme zvládli za celý život vypít či jinak požit, je reálné číslo, má tedy jednu určitou hodnotu. I když tato hodnota existuje a můžeme ji tedy teoreticky určit naprosto přesně, prakticky nejsme schopni se k ní s námi dostupnými metodami dostat – my sami si přesnou historii našeho požívání vody nepamatujeme a ani ji nemůžeme zpětně dohledat, stejně tak ani špičkoví biologové nemohou ze stavu našeho organismu získat informaci o tom, kolik vody jsme za celý život pozřeli. Proto tvrdíme, že tuto informaci odhadujeme, což znamená, že se za pomoci námi dostupných informací a výpočtů snažíme k danému reálnému číslu co nejvíce přiblížit.

Na to, jak se dostat k dostatečně přesnému odhadu, existuje mnoho cest. Správný odhad není takový, který je nutně nejbližší reálné situaci. Pokud bychom množství vody odhadli jen pomocí řešení náhodného čísla, je tento odhad špatný, a to i kdybychom se náhodou trefili do reálného výsledku. Důvod je ten, že přesnost náhodného odhadu nikdy nezjistíme, a proto nám je k ničemu. Objektivně správný odhad naopak získáme pomocí dat, která buď známe přesně (například náš věk), dokážeme je dostatečně přesně odhadnout (například kolik pomerančů týdně sníme) nebo je máme v podobě statistických dat, která můžeme na naši situaci aplikovat, aniž by došlo k velkému zkreslení (například kolik vody pomeranč průměrně obsahuje). Obecně platí, že čím méně informací potřebujeme k získání našeho odhadu, tím menší má nejistotu plynoucí z uvedených veličin, zároveň ale pokud dodáme více informací, než je nutné potřeba, výsledná chyba se může jen zmenšit, protože odhad vystihuje situaci přesněji.

Jako nejjednodušší a nejpřesnější (s ohledem na množství informací, které budeme muset použít) se jako řešení naší úlohy nabízí součin našeho věku v letech a množství vody, které jsme za rok našeho života průměrně zkonzumovali. Musíme tedy zjistit dva číselné údaje – kolik máme let (to je informace, kterou známe přesně) a kolik vody jsme průměrně přijímali každý rok v určité období svého života. To je informace, kterou nikdy přesně nezjistíme, a tak máme dvě možnosti: odhadnout ji, nebo využít statistická data.

Odhadovat, kolik jsme v určitých fázích svého života zkonzumovali vody, je jistě možné, ale pravděpodobně silně nad rámec tohoto vzorového řešení. Jen zamyšlení nad tím, z jakých potravin vodu získáváme, by vystačilo na jednu samostatnou úlohu. Naopak můžeme využít toho, že se tímto problémem někdo již vědecky zabýval, a vydat se tedy druhou cestou – cestou statistických dat. Po chvíli hledání na internetu najdeme zdroj¹, který říká, že průměrný denní příjem vody dospělého muže je 3,7l. Tento zdroj je vědecký článek, který musel být před umístěním na internet zkontrolován dalšími vědci a způsob měření v něm odpovídá našemu účelu (příjem vody nebyl například měřen pro specifickou skupinu profesionálních sportovců z východní Asie), tudíž této informaci můžeme věřit a můžeme s ní dále počítat.

Když nyní (za předpokladu, že je nám 15 let) tyto hodnoty vynásobíme, zjistíme, že jsme dle tohoto dohadu za celý náš život vypili přibližně 20,3 m³ vody. I když toto číslo již můžeme považovat za relevantní, určitě nás teď napadá, že v našem řešení jsou značné mezery. Ta největší

¹https://www.researchgate.net/publication/7715558_Human_Water_Needs

nepochybně je, že předpokládáme, že jsme po celou dobu našeho života konzumovali vodu jako průměrný dospělý muž, což je hodně velké zjednodušení, které má nezanedbatelný vliv na náš výsledek. Můžeme se tak nyní pokusit najít další data, kterými bychom náš výpočet zpřesnili.

Na internetu například najdeme údaje o tom, kolik lidí v různých fázích svého života konzumují čisté vody.² Můžeme si situaci zjednodušit a předpokládat, že poměr vody přijaté ze sklenice a vody přijaté ze všech zdrojů je ve všech fázích života stejný, takže si dokážeme dopočítat příjem vody v různých časových obdobích lidského vývoje. Když tyto údaje potom sečteme, zjistíme, že jsme tímto postupem došli k odhadu $12,2 \text{ m}^3$, tedy výrazně nižšímu výsledku než v předchozím případě. Tento odhad můžeme považovat za objektivně přesnější, jelikož reflektuje různá množství vody, která v průběhu života přijímáme, určitě si ale uvědomujeme, že by bylo možné ho dále zpřesnit. Mohli bychom se například zamyslet, jak se vypořádat s tím, že poměr vypité a přijaté vody není ve všech fázích života stejný. Také bychom se měli podívat po více zdrojích a posoudit, zda ty, co jsme použili, jsou pro naše účely nejlepší a nejpresnější. Dále by bylo vhodné blíže specifikovat náš věk (pravděpodobně v době odevzdávání této úlohy nemáme zrovna narozeniny) nebo počítat s přestupnými roky. To vše jsou kroky, které můžeme dále podniknout, aby naše řešení bylo ještě lepší a přesnější, my si zde ale vystačíme s naším méně přesným výsledkem $12,2 \text{ m}^3$.

Nyní se pustíme do druhé části úlohy, tedy výpočtu pravděpodobnosti, že jsme ve sklenici vody vypili molekulu vody, kterou jsme již v minulosti pozřeli. Víme, že v našem výpočtu bude hrát roli celkové množství vody na Zemi, množství vody ve sklenici a množství vody, které jsme již za život vypili. Na výsledný výpočet tak přijdeme po jednoduchém zamýšlení – čím větší objem vody ve sklenici je, tím je naše pravděpodobnost vyšší, stejně je to i s množstvím v minulosti vypité vody. Naopak čím vyšší je množství vody na Zemi, tím menší je pravděpodobnost, že některou z molekul vypijeme dvakrát.

Pravděpodobnost, že nějaká molekula vody je ta, kterou jsme již dříve vypili, tak bude vyjádřena vztahem

$$p_v = \frac{\text{objem již vypité vody}}{\text{objem vody na Zemi}}.$$

Dále můžeme počítat, kolik hledaných molekul budeme s největší pravděpodobností mít ve vypité sklenici

$$p = p_v \cdot \text{počet molekul vody ve sklenici}.$$

Když za objem vody ve sklenici dosadíme $0,21$ dostaneme počet molekul tak, že si spočítáme hmotnost jako $m = V/\rho$, kde ρ je hustota vody, dále si hmotnost vydělíme molární hmotností vody, abychom dostali počet molů vody. Toto číslo stačí vynásobit Avogadrovou konstantou a dostaneme počet molekul. Výpočet za nás může provést např. WolframAlpha, zadáme-li heslo „how many molecules in .2l of water“ a dostaneme počet molekul jako $N \doteq 10^{25}$.

Za objem vody na planetě³ dosadíme $1,36 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$, takže dostaneme celkem $p = 10^7$. Toto je výsledek výrazně převyšující jednu molekulu, můžeme tedy říci, že dle našeho modelu je pravděpodobnost 100 %. Ale co přesně vyjadřuje výsledek $p = 10^7$? Znamená to snad, že když nabereme sklenici vody, tak tam bude přesně 10^7 molekul, které jsme již vypili? Ne, když do sklenice nalijeme vodu, tak jich tam může být 10^6 , 10^8 atd. Náš výsledek pouze říká, že kdybychom tímto způsobem nabrali vodu do sklenice velmi mnohokrát, tak by tam v průměru bylo 10^7 molekul, které jsme již jednou vypili, na sklenici.

²https://www.ars.usda.gov/ARSEUserFiles/80400530/pdf/DBrief/7_water_intakes_0508.pdf

³<https://en.wikipedia.org/wiki/Hydrosphere>

Náš výsledek je velmi přibližný, neboť jsme při výpočtu např. zanedbali možnost, že by se molekuly vody rozpadly nebo znovu složily, neboť jsme si nebyli jistí, jak s tímto efektem počítat. Nebo jsme v naší aproximaci celou dobu předpokládali, že když vyloučíme vodu z těla, tak se ihned rozmíchá s veškerou vodou na planetě a následně když pak pijeme vodu, tak jsou v ni rovnoměrně zastoupeny molekuly z celého světa. Někdo by ještě mohl namítnout, že jsme předpokládali, že v těch 10 m^3 vody, kterou jsme vypili za 15 let, byly pouze nové molekuly, a že bychom měli započítat i to, že v průběhu života pijeme některé molekuly poněkolkáté. To je sice pravda, ale když si vypočítáme poměr mezi námi vypitou vodou a světovou vodou, dostaneme $p_v \doteq 10^{-17}$. Zastoupení vody, kterou pijeme podruhé je tedy vzhledem k celkovému množství vypité vody naprosto zanedbatelné a žádné podstatné nepřesnosti se v tomto směru nedopouštíme.

Karolína Letochová
kaja@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.