

Úloha VI.V ... Hlavně nepadej

7 bodů; průměr 4,78; řešilo 23 studentů

Pavel doma našel šest identických dřevěných kvádrů o rozměrech $6 \times 3 \times 8$ cm a hmotnosti 100 g. Zajímalo by ho, jaké mají kvádry stabilní a vratké polohy. Která poloha jednoho kvádrů je nejstabilnější a jaká je její stabilita? Předpokládejte, že kvádr je homogenní.

Následně Pavel zkoušel stavět most z kostek na hraně stolu. Nejdříve položil kvádr a vysunul ho do co nejzazší stabilní polohy. Poté přidal kvádr druhý a tak dále. Na jakou stranu kvádry pokládal, pokud chtěl mít most co nejdelší? Jaká je maximální délka mostu a bude jeho délka větší než délka jednoho z kvádrů?

Polohy kvádrů můžeme rozřadit podle způsobu umístění. Jako první si ale označíme délky stran kvádrů $a = 6$ cm, $b = 3$ cm a $c = 8$ cm. Máme celkem 3 možnosti, kvádr lze položit na stěnu, hranu a vrchol. Stabilní pozice budou pouze polohy, kdy kvádr leží na stěně, např. ab , bc , nebo ca – sami si můžete představit, že po vychýlení (např. malém nadzvednutí) se kvádr položí zpět na stěnu. Nestabilní pozice jsou na hraně nebo vrcholu, kde kvádr při výchylce spadne do stabilní polohy.

Nejstabilnější pozice samozřejmě bude jedna ze stabilních poloh, a to ta s co nejnižším těžištěm. Tomu odpovídá položení na straně ac , nebo ca s výškou těžiště $y_s = b/2$. Pro určení stability musíme najít nejbližší labilní pozici, což je v tomto případě otočení kolem delší strany $y_l = \sqrt{b^2 + a^2}/2$. Stabilita kvádrů bude

$$W = mg(y_l - y_s) = \frac{1}{2}mg(\sqrt{b^2 + a^2} - b) = 18 \text{ mJ}.$$

Při výpočtu nesmíme zapomenout převést na základní jednotky. Nyní se zaměříme na druhou část příkladu. Kvádry budeme pokládat v nejstabilnější poloze a vysuneme delší stranu c . První blok nejdále vysuneme o polovinu délky strany

$$l_1 = \frac{c}{2}.$$

Pod vysunutý kvádr přidáme další nevysunutý blok a chceme zjistit jejich společné těžiště. Zajímá nás pouze složka v ose x , podle které určíme, kam až je můžeme vysunout. Střed osy zvolíme na hraně stolu, kde leží těžiště vysunutého kvádrů $x_1 = 0$. Těžiště nevysunutého bloku leží ve vzdálenosti $x_2 = -\frac{c}{2}$ od hrany stolu. Společné těžiště bloků je

$$T_2 = \frac{mx_1 + mx_2}{m + m} = \frac{0 - \frac{c}{2}}{2} = -\frac{c}{4}.$$

Soustavu kostek můžeme posunout o čtvrtinu délky směrem k hraně stolu. Po přidání třetí kostky použijeme stejný postup. Společné těžiště původních dvou kostek se nyní nachází přesně nad hranou stolu $x_{1+2} = 0$ a nově přidaná kostka má znovu vzdálenost těžiště $x_3 = -\frac{c}{2}$. Nové těžiště systému je

$$T_3 = \frac{2mx_{1+2} + mx_3}{2m + m} = \frac{2 \cdot 0 - \frac{c}{2}}{3} = -\frac{c}{6}.$$

Celou soustavu lze posunout o další šestinu. U výpočtů se objevilo určité pravidlo – při přidání n -té kostky lze soustavu vysunout o vzdálenost $\frac{c}{2n}$. Použitím tohoto pravidla vypočteme, že při použití 6 kostek, dosáhne hrana první kostky vzdálenosti

$$l_6 = c \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \right) = c \frac{49}{40} = 1,225c.$$

Pavlovi se tedy podaří kostky vysunout dále, než je délka jedné kostky.

Patrik Kašpárek
patrik@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.