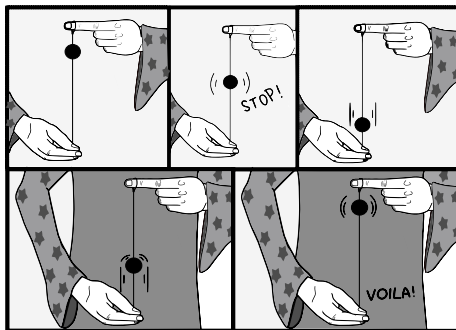


Úloha VI.5 ... Levitující koule

7 bodů; průměr 5,19; řešilo 21 studentů

Na jedné pouti předváděl kouzelník magický trik: obecnstvu ukázal kouli, která byla z protilehlých stran přivázaná za provázek. Následně ale kouzlem dokázal kouli buď spustit dolů, nebo poslat nahoru. Přátelé Výfuku, kteří toto kouzlo viděli, se však nenechali oklamat a ihned prohlédli, že se o žádné kouzlo nejedná: v kuličce jsou totiž místo jednorozčích žíní dvě spojené kladky. Podívejme se na to, jak by soustava kladek mohla fungovat:



- Mějme kladku o poloměru $r_1 = 10$ cm, na které je ve středu připevněná menší kladka o poloměru $r_2 = 2,0$ cm. Na větší kladce je připojen jeden kus provázku, který je kolem ní obmotaný. Stejně je to i na menší kladce, jen je provázek obmotán opačným směrem. Když zatáhneme za oba provázky, kterým směrem se soustava kladek začne otáčet? Připojte svůj náčrt, aby vše bylo jasné. Jistě se bude hodit znalost momentů síly.
- Jak jste z předchozí podúlohy jistě pochopili, při zatažení za oba konce nitě se celková délka nenamotané nitě prodlouží a kulička (při vhodné orientaci) stoupne. Kouzelník může šikovnou manipulací ruky vytvořit dojem, že nit se vůbec neprodlouží. Potřebuje k tomu však, aby se kulička chovala předvídatelně, tedy aby při prodloužení nenamotaných nití o Δl kulička stoupla o tu samou délku Δl . Jaký musí být poměr r_1/r_2 , aby toto bylo možné?

Směr otáčení

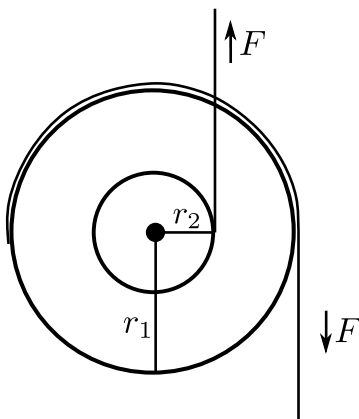
Jak je nám v zadání napovězeno, využijeme zde veličinu nazývanou moment síly, která se běžně značí M . Hodí se nám tu, protože nám umožňuje popsat otáčivý pohyb – má stejný význam, jako má síla pro pohyb posuvný.

Dle doporučení v zadání si situaci nejprve představme a nakresleme. Při kreslení si můžeme vybrat z několika možných způsobů, jak provázky nakreslit, ale nezáleží na tom, který vybereme. Z obrázku je vidět, že kdybychom neuvažovali kladky spojené, tak se budou otáčet opačnými směry – na zde uvedeném obrázku by se velká kladka otáčela po směru hodinových ručiček a malá proti němu.

Nyní zbývá otázka, který směr převládne, když kladky spojíme. Zde nám pomohou právě momenty sil. Moment síly můžeme v tomto případě spočítat pomocí vztahu:

$$M = Fr.$$

To znamená, že moment síly se zvyšuje nejen s působící silou F , ale také se vzdáleností od středu otáčení r , v níž síla působí. Stejně jako u sil, i pro momenty platí, že když působí dva proti sobě, těleso se bude pohybovat ve směru účinku toho většího. Jelikož na obě kladky působí stejně velká síla, záleží na vzdálenosti. Působíště síly je od středu otáčení logicky dále u kladky s větším poloměrem, a tak se bude systém kladek otáčet ve stejném směru, jakým by se otáčela větší kladka samotná. Dle našeho obrázku tedy po směru hodinových ručiček.



Poměr r_1/r_2

Jak víme, během provádění kouzla se budou kladky otáčet. Představme si tedy, že při zadaném stoupnutí kuličky o Δl se kladky otočí o úhel φ , který budeme pro jednoduchost uvažovat ve stupních. Výška Δl , o kterou se kulička posune vzhůru při otočení, musí logicky odpovídat délce provázku, který se při tomto otočení na menší kladku namotá. Délku oblouku se středovým úhlem φ a poloměrem r_2 můžeme vypočítat pomocí vztahu:

$$\Delta l = \frac{\varphi}{360^\circ} 2\pi r_2.$$

Nyní chceme opět pomocí úhlu φ ještě vyjádřit, o kolik se prodlouží nenamotaná část provázku. Změna délky nenamotané části odpovídá rozdílu toho, kolik provázku se odmotá a kolik se ho namotá. Délku provázku, která se namotá na menší kladku, jsme už určili a velmi podobně určíme i délku provázku, který se odmotá z větší kladky:

$$\Delta l_2 = \frac{\varphi}{360^\circ} 2\pi r_1.$$

Pro rozdíl, který musí být roven Δl , tedy dostaneme rovnici:

$$\frac{\varphi}{360^\circ} 2\pi r_1 - \frac{\varphi}{360^\circ} 2\pi r_2 = \Delta l.$$

A teď už máme řešení na dosah. Máme totiž zadáno, že výška, o kterou se kulička zvedne, a délka odmotaného provázku jsou shodně Δl , a tak se musí rovnat i výrazy, které jsme pro ně odvodili. Tím pádem tedy dostáváme rovnici, v níž na levé straně máme výšku, o kterou se kulička zvedne, a na pravé straně délku odmotaného provázku:

$$\frac{\varphi}{360^\circ} 2\pi r_2 = \frac{\varphi}{360^\circ} 2\pi r_1 - \frac{\varphi}{360^\circ} 2\pi r_2.$$

Můžeme si všimnout, že ve všech členech se nachází stejný výraz, který tak můžeme zkrátit, čímž dostaneme:

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 - r_2, \\ \frac{r_1}{r_2} &= 2. \end{aligned}$$

Což je námi hledaný výsledek. Aby tedy kouzelník mohl magický trik správně provést, potřebuje, aby měla větší kladka dvakrát větší poloměr než ta menší.

Aleš Opl
ales@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.