

Úloha VI.2 ... Queen of resonance

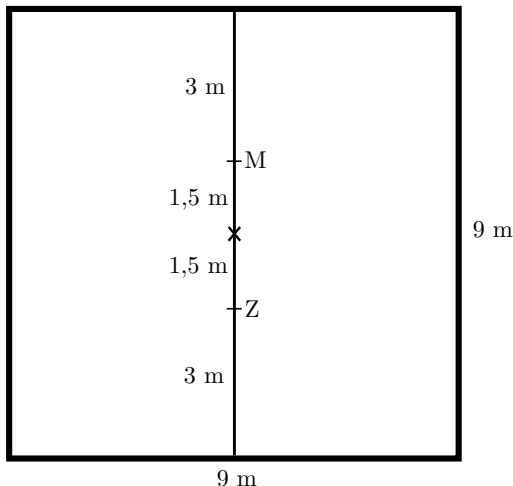
5 bodů; průměr 4,08; řešilo 24 studentů

Když hudební skupina Queen nahrávala svou ikonickou skladbu We Will Rock You, chtěla do rytmu písně přidat zvuk dupoty davu lidí. Jelikož u sebe ale zrovna neměla své věrné fanoušky, rozhodla se improvizovat. Napadlo ji nahrát několik po sobě jdoucích dupnutí, a tak vytvořit iluzi davu. Při pokusech se ale vyskytl problém – jak velké rozestupy mají zvuky tvořící davové dupnutí mít? Při pravidelných rozestupech bude výsledný zvuk připomínat spíše ozvěnu nežli dav. Pojďme jim pomoci!

Nahrávání skladby probíhá ve čtvercové místnosti o rozměrech 9×9 metrů. Člen kapely Queen stojí $s = 1,5$ m od středu místnosti. Mikrofon je také ve vzdálenosti s od středu místnosti, ale na opačné straně. Při dupnutí vznikne zvuková vlna, která se bude pro zjednodušení pohybovat pouze dopředu a dozadu (vlna změní směr při nárazu do přední či zadní stěny místnosti). V jakých intervalech zaznamená mikrofon zvuk vytvořený jedním dupnutím? Popište prvních dvacet ozvěn a pokuste se vysvětlit, proč pravidelnost, která se v těchto intervalech nachází, způsobuje ozvěnu.

Dále víme, že nejkratší časový interval, za který hudebníci dokáží zopakovat dupnutí (např. po zastavení nahrávání), je $\tau = 10$ ms. Zjistěte, v jakých intervalech (v násobcích τ) od začátku nahrávání mají dupat, aby výsledný zvuk nezněl jako ozvěna jednoho dupnutí. Jak tyto násobky nazýváme?

Pro snazší orientaci je situace znázorněná na obrázku 1.



Obrázek 1: Nákres odražení vln

První vlna se bude pohybovat směrem dopředu, takže mikrofonu dosáhne po 3 metrech, potom bude pokračovat až k protější stěně, kde se odrazí a bude zase směřovat k mikrofonu, na který narazí po prvním kontaktu za 6 m. Poté bude zase pokračovat ke stěně, kde se odrazí a doputuje zase k mikrofonu s tím, že tentokrát urazí 12 m. A takto se to bude stále opakovat.

Druhá vlna bude ve směru dozadu ke stěně, od které se odrazí a bude směřovat k mikrofonu, ke kterému takto dorazí za 9 m. Od něj bude pokračovat ke stěně a zase zpátky, kde urazí 6 m. Tato posloupnost vzdáleností již bude stejná jako v případě 1. vlny.

Pro zjednodušení budeme používat násobky 3 (tj. $3\text{ m} = 1$). Vlna směrem dopředu urazí 1 k mikrofonu a ta, co půjde dozadu 3. Dále se budou přičítat vždy ve stejných intervalech hodnoty 2 a 4 (6 m a 12 m), kdy se vlny zase dostanou k mikrofonu. Z toho se dá vyvodit, že intervaly ozvěn budou vždy liché. Tato posloupnost se dá vyjádřit jednoduchým vzorcem:

$$i = 2k + 1,$$

kde proměnná k je číslo ozvěny a i je hodnota daného intervalu. Dosadíme za k hodnoty 1 až 20 a vyjde nám výsledná řada:

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41.

Ozvěna je způsobená proto, že intervaly mezi dvěma po sobě jdoucími zvuky jsou stejné a každá ozvěna má menší intenzitu než předchozí.

V druhé části úlohy nás zajímalo, v jakých intervalech má zpěvák dupat, aby to neznělo jako ozvěna. Na to potřebujeme čísla, která jsou dělitelná jen sama sebou a 1, aby byl signál nepravidelný. Hledáme tedy prvočíselné intervaly, protože si můžeme být jisti, že v prvočísech se neopakují násobky žádného čísla.

V reálném životě dupot davu nezní jako ozvěna proto, že dupající lidé nejsou domluvení na dupání v nějakých konkrétních intervalech. Když však chceme pravidelnosti zamezit uměle, můžeme využít například právě prvočísel, u kterých je opakování vyloučeno.

Povšimněte si, že tato úloha nezávisí na rozměrech místnosti, pouze na vzájemném rozmístění zpěváka a mikrofonu. Kdyby místnost byla například dvakrát větší, stále bychom zachovávali stejné intervaly.

Na závěr jen doplníme zajímavost, že píseň *We Will Rock You* napsal kytarista skupiny Queen, Brian May, který je také astrofyzik a pracoval například v týmu sondy New Horizons.

Anežka Čechová
anezka@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.