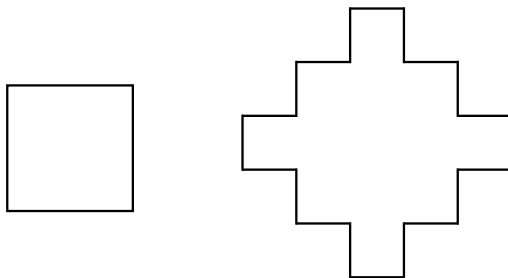


Úloha V.V ... Podivná vložka

7 bodů; průměr 5,68; řešilo 25 studentů

Ve Výfučení jsme si detailně představili fraktál zvaný Kochova vložka. Nyní si ji mírně modifikujeme a budeme zkoumat její vlastnosti. Základem naší vložky bude čára v podobě obvodu čtverce a každý krok bude probíhat tak, že jednu jeho stranu rozdělíme na třetiny a prostřední třetinu prodloužíme tak, aby mohla tvořit menší čtverec přiložený k původnímu (viz obrázek 1).



Obrázek 1: Počáteční kroky upravené Kochovy vložky.

1. Jaká bude délka útvaru po n -tém kroku? Co se s délkou bude dít, pokud budeme n zvětšovat? Ustálí se na nějaké konkrétní hodnotě?
 2. Najděte nějaký útvar s konečným obsahem, do kterého se vložka určitě vejde. Spočítejte jeho obsah, pokud strana původního čtverce má délku 1.
 3. Určete Hausdorffovu a topologickou dimenzi naší vložky. Jedná se o fraktál?
1. Po n -tém kroku bude mít upravená Kochova vložka tvar lomené čáry složené z řekněme N stran o délce a . Celková délka vzniklého útvaru potom bude:

$$l_n = Na.$$

Nyní musíme zjistit, jak se Na mění v závislosti na n . Víme, že po každém kroku se z každé strany umaže prostřední třetina a přidají se k ní další tři třetiny její původní délky. Každá strana o délce a se proto prodlouží o $2/3 \cdot a$, takže její nová délka bude:

$$a' = a + \frac{2}{3}a = \frac{5}{3}a.$$

Pro délku celého útvaru po $n + 1$ krocích potom platí:

$$l_{n+1} = N \cdot \frac{5}{3}a = \frac{5}{3}l_n.$$

Tento vztah bude platit pro libovolné n , což znamená, že při každém kroku se délka útvaru zvětší 5/3krát. Víme, že před prvním krokem ($n = 0$) měla vložka tvar čtverce s obvodem $l_0 = 4a_0$. V dalších krocích se délka změnila na:

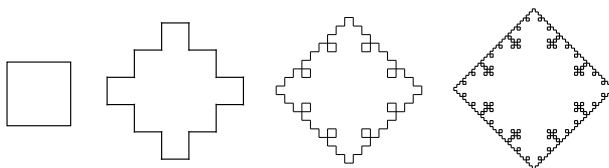
$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{5}{3} \cdot 4a_0, \\ l_2 &= \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot 4a_0, \\ l_3 &= \left(\frac{5}{3}\right)^3 \cdot 4a_0. \end{aligned}$$

Víme, že se délka při každém kroku zvětšuje stále stejným způsobem, proto můžeme jednoduše uhádnout, že délka po n krocích je:

$$l_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n \cdot 4a_0.$$

Délka naší vložky se tedy po každém kroku zvětší o 2/3, což je stále větší a větší číslo. Proto není možné, aby se délka ustálila na konkrétní hodnotě. Místo toho poroste nade všechny meze.

2. Když si nakreslíme prvních několik kroků (viz obrázek 2), můžeme si všimnout, že celá vložka leží uvnitř nějakého čtverce.



Obrázek 2: Kochova vložka

Ukážeme, že jeho stran se dotýkají vrcholy původního čtverce a že jeho strana má potom délku rovnou $b = \sqrt{2}$. Zvolíme k tomu následující postup – nejdříve nakreslíme původní čtverec o straně 1. Kolem tohoto čtverce nakreslíme nový větší čtverec tak, aby se jeho strany dotýkaly vrcholů toho menšího a spočítáme délku jeho strany. Když si pomyslně rozdělíme větší čtverec na čtyři čtverečky s poloviční stranou $b/2$, vidíme, že strany menšího čtverce jsou úhlopříčkami čtverečků. Díky tomu můžeme spočítat délku těchto stran z Pythagorovy věty, protože platí:

$$\begin{aligned} 1^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2, \\ \frac{b}{2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ b &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Délka většího čtverce je tedy skutečně $\sqrt{2}$. Ještě však stále musíme dokázat, že se celá vložka do tohoto čtverce vejde akorát. Sledujme proto, co se bude dít s menším čtvercem,

když na něj aplikujeme naše pravidla pro kroky a bude nás zajímat jen to, co se děje na vnějším okraji vzniklé křivky. Při každém kroku v podstatě přilepíme na středy všech krajních stran čtverce s třetinovou délkou strany (to, že navíc umažeme prostřední třetinu strany a že i směrem k prostředku vložky vznikají nějaké útvary, můžeme pominout, protože jsme řekli, že nás zajímá pouze okraj křivky). To ale znamená, že vrcholy (místa, kde se křivka láme) zůstávají po každém kroku stále na stejném místě. Vrcholy původního (menšího) čtverce se tedy budou i po mnoha krocích stále dotýkat stran většího čtverce.

Zbývá vyřešit poslední otázku, jestli přilepené čtverce po každém kroku stále leží uvnitř většího čtverce. Odpověď je ano. Podívejme se např. na vložku po druhém kroku. Vrcholy původního čtverce se většího čtverce dotýkají tak, že úhel mezi stranami těchto čtverců je 45° . Ve třetině strany původního čtverce jsme vztyčili stranu přilepeného čtverce s délkou opět $1/3$. Vrchol přilepeného čtverce a původního čtverce můžeme proto spojit úhlopříčkou, tato úhlopříčka je opět úhlopříčka čtverce, proto svírá s původní stranou úhel 45° a leží tedy na straně většího čtverce. Z podobnosti geometrické situace lze vidět, že přilepené čtverce po každém kroku nikdy hranici většího čtverce nepřekročí, pouze se mohou svými vrcholy dotýkat jeho stran.

Ukázali jsme tedy, že celá vložka se akorát vejde do čtverce se stranou $b = \sqrt{2}$, obsah tohoto čtverce potom je: $S = b^2 = 2$.

3. K výpočtu Hausdorffovy dimenze použijeme postup popsáný ve Výfučení – když jednu stranu vložky zvětšíme $k = 3$ krát, bude se skládat z $N = 5$ původních stran, proto pro dimenzi d platí:

$$5 = 3^d \quad \Rightarrow \quad d = \log_3 5 = 1,46.$$

I když je Hausdorffova dimenze vložky větší než 1, jedná se stále o křivku, resp. lomenou čáru, proto její topologická dimenze je rovna 1. Naše čtvercová vložka je bezpochyby fraktál, neboť splňuje základní vlastnosti fraktálů: její Hausdorffova dimenze je větší než topologická, při změně měřítka pozorujeme stále stejné struktury (viz obrázek 2) a byla vytvořena opakováním jen jednoho pravidla.

Jiří Kohl

jirkak@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.