

Úloha V.E ... Padající kornoutky

7 bodů; průměr 5,16; řešilo 19 studentů

Když těleso padá volným pádem, tak sice nejprve zrychluje, ale poté dosáhne své nejvyšší terminální rychlosti, která zůstává po zbytek pádu konstantní. V měření u této úlohy použijeme tělesa, která dosáhnou terminální rychlosti brzy, a to papírové kornoutky. Když papírový kornoutek padá, působí na něj jednak gravitační síla, jednak odporová síla prostředí, kterou můžeme odhadnout jako

$$F_O = \frac{1}{2} C \rho S v^2,$$

kde v je rychlost kornoutku, S jeho průřez, ρ hustota vzduchu a C je Newtonův odporový koeficient, který je konstantou pro těleso daného tvaru (nezávisle na velikosti). Dvě působící síly jsou v okamžiku, kdy má těleso terminální rychlost, v rovnováze.

Vášim úkolem bude změřit závislost terminální rychlosti papírového kornoutku na jeho velikosti při stejném vrcholovém úhlu. Každé měření několikrát opakujte a výsledek vyneste graficky. Naměřené hodnoty pak porovnejte se závislostí, kterou teoreticky předpovíte. Na základě toho určete velikost Newtonova odporového koeficientu kornoutků.

Nápověda: Nemáte-li doma dostatečně přesnou váhu, můžete hmotnost kužele určit z gramáže uvedené na balení papíru. Běžný kancelářský papír má 80 g na m².

Teorie

Aby kornoutek padal konstantní *terminální rychlostí*, musí být působící síly v rovnováze. Na kornoutek působí tíhová síla F_G směrem dolů, odporová síla F_O směrem nahoru a ještě také vztahová síla vzduchu F_{vz} . Aby tyto síly byly v rovnováze, musí platit

$$F_G = F_O + F_{vz}.$$

Když vyjádříme odporovou sílu pomocí vzorce v zadání, tíhovou sílu jako součin hmotnosti a tíhového zrychlení a vztahovou sílu pomocí Archimédova zákona, dostaneme

$$mg = \frac{1}{2} C \rho S v^2 + V \rho g.$$

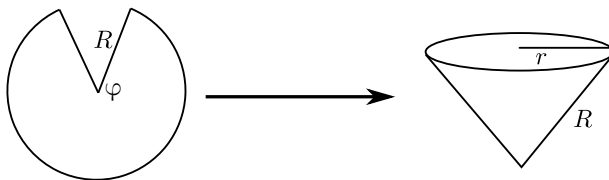
Z tohoto vzorce můžeme vyjádřit terminální rychlost v , ve které jsou síly v rovnováze (pozor, S zde je průřez kornoutem):

$$v = \sqrt{\frac{2g(m - V\rho)}{\rho SC}}. \quad (1)$$

Tuto rychlost pak změříme jednoduše tak, že budeme měřit, za jaký čas t urazí kornoutek dráhu s , a jelikož zde předpokládáme rovnoměrný pohyb, určíme rychlost jako

$$v = \frac{s}{t}. \quad (2)$$

Nyní nám ještě zbývá v rovnici (1) určit neznámé parametry, hmotnost m , objem V a plochu S , které závisí na velikosti kornoutku. Kornoutky vyrábíme tak, že z papíru vystříháme kruhovou výseč o poloměru R a vnitřním úhlu φ , kterou smotáme do kornoutu ve tvaru kužele s podstavou r . Celý postup můžeme vidět na obrázku 1.



Obrázek 1: Výroba kornoutu

Hmotnost kornoutku určíme jako hmotnost použitého papíru (zanedbáme izolepu na slepení) pomocí jeho plošné hustoty $\mu = 80 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}$ jako

$$m = \mu S_k = \mu \pi R^2 \frac{\varphi}{2\pi}.$$

Podstava kornoutu je obepsána kružnicí o délce φR . Plochu průřezu proto spočítáme pomocí poloměru podstavy $r = \varphi/(2\pi)R$ jako

$$S = \pi r^2 = \frac{\varphi^2}{4\pi} R^2.$$

Pro objem kužele pak pomocí poloměru r dostáváme (výšku h spočteme z Pythagorovy věty)

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \frac{\varphi^2}{4\pi} R^2 \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{1}{3} \frac{\varphi^2}{4\pi} R^3 \sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{4\pi^2}}.$$

Po dosazení do vztahu (1) tedy dostáváme:

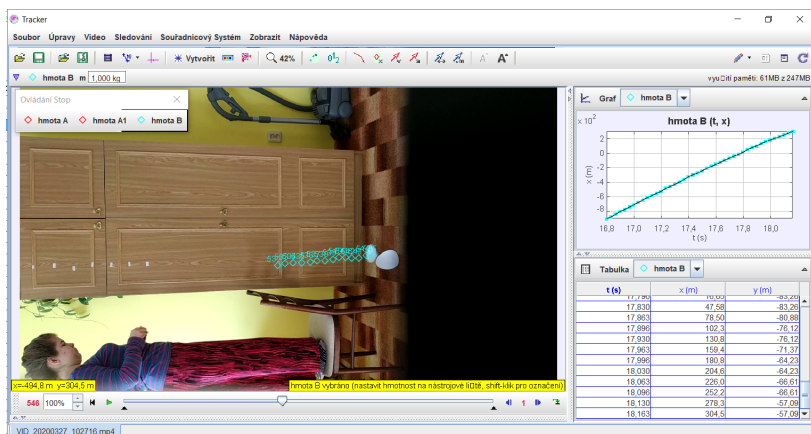
$$v = \sqrt{\frac{2g \left(2 \frac{\pi\mu}{\rho\varphi} - \frac{1}{3} R \sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{4\pi^2}} \right)}{C}}.$$

Když u všech kornoutů zachováme úhel φ a měníme pouze poloměr, zůstává tvar kornoutku i jeho vrcholový úhel stejný, a mění se tak pouze jeho rozměr.

Postup

K měření byly použity kornoutky vyrobené z výseče o úhlu $\varphi = 270^\circ$ o poloměrech R postupně 10, 8, 6, 4, a 2 cm. Ty byly pouštěny od stropu a byla měřena jejich doba pádu od rysky ve výšce $s = (2,00 \pm 0,01) \text{ m}$. Pro zvýšení přesnosti tohoto měření byly jednotlivé pády natáčeny na video se snímkovou frekvencí 30 snímků za sekundu a doba pádu byla určována pomocí programu Tracker, který umožňuje sledování objektu na každém snímku videa, což velmi zpřesňuje měření. Každé měření bylo provedeno desetkrát, hodnoty byly zprůměrovány a byla vypočtena jejich odchylka.

V něm bylo možné také sledovat průběh závislosti polohy na čase a ověřit tak, že v měřeném úseku již kornout dosáhl terminální rychlosti. Přesnost měření touto danou metodou je polovina času mezi snímky, tedy $0,033 \text{ s} / \sqrt{3} \doteq 0,019 \text{ s}$. Měření délky dráhy bylo provedeno pásmem o velikosti dílku 1 cm, avšak vlivem perspektivního zkreslení při natáčení na kameru a nepřesnosti měření v horizontální poloze budeme za nejistotu danou metodou považovat celou délku dílku.



Obrázek 2: Ukázka zpracování dat v programu Tracker

Výsledky

Naměřené časy pádu jsou uvedeny v tabulce 1. Přeškrtnuté hodnoty zde nesplňují podmínku 3σ ¹, proto byly z výpočtů odstraněny a rychlost je již spočítána bez nich. Symbolem $\sigma_A(t)$ zde označujeme směrodatnou odchylku, ze které byla vypočtena celková nejistota měření $\sigma(t)$ pomocí metody přenosu nejistot jako $\sigma(t) = \sqrt{\sigma_A^2(t) + \sigma_B^2(t)}$. V tomto výrazu je $\sigma_B(t)$ nejistota daná metodou, která je pro nás polovina času mezi snímky, tedy $\sigma_B(t) = 0,019$ s. Z těchto časů pak byla podle vzorce (2) dopočítána rychlost v a její nejistota jako

$$\frac{\sigma(v)}{v} = \frac{\sigma(t)}{t} + \frac{\sigma(s)}{s}.$$

Předpovídaná závislost terminální rychlosti na poloměru R je poměrně složitá, závislost druhé mocniny rychlosti v^2 by však měla být lineární funkce, vykreslíme tedy ji. Tuto funkci tím pádem můžeme proložit lineární funkcí $v^2 = A + B \cdot R$, což můžeme vidět na obrázku 3.

Pomocí programu gnuplot dostáváme koeficienty fitu $A = (2,99 \pm 0,07) \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ a $B = -(0,12 \pm 0,01) \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Hodnotu odporového koeficientu C určíme pomocí fitovacího koeficientu A , který jsme určili přesněji a pro který platí

$$A = \frac{4g\pi\mu}{\rho\varphi C} \Rightarrow C = \frac{4g\pi\mu}{\rho\varphi A},$$

kde ρ je hustota vzduchu, kterou určíme pomocí webového kalkulátoru² pro teplotu $t = 21,0$ °C, tlak $p = 1\,021,1$ kPa a vlhkost 56 % jako $\rho = (1,203 \pm 0,001) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, což jsou podmínky v době měření. Nejistotu určení koeficientu určíme metodou přenosu nejistot jako

$$\frac{\sigma(C)}{C} = \frac{\sigma(A)}{A} + \frac{\sigma(\rho)}{\rho}.$$

Pro odporový koeficient tedy dostáváme výsledek $C = 0,58 \pm 0,02$.

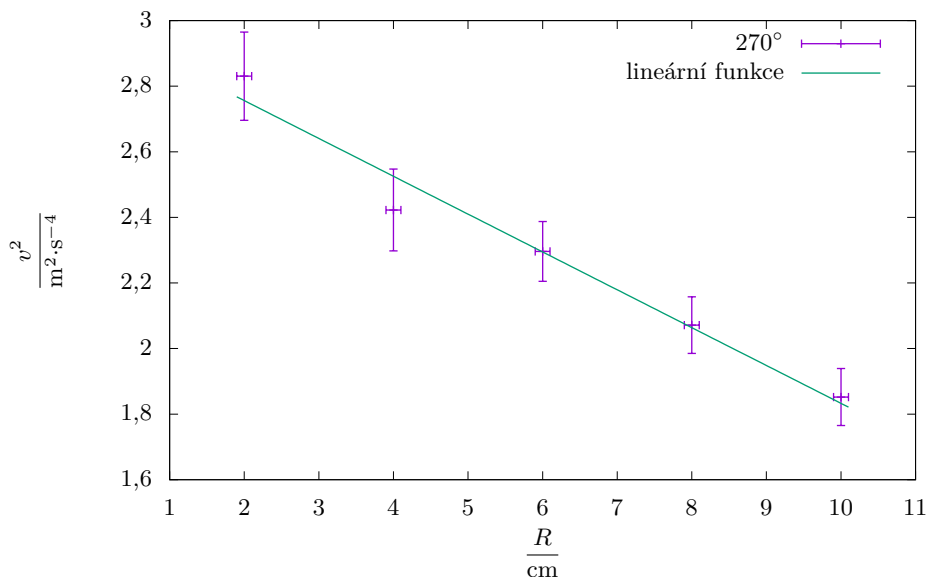
¹Ta říká, že hodnoty vzdálené od průměru o více než tři směrodatné odchylky jsou pravděpodobně hrubou chybou, proto je můžeme z výpočtů vyškrtnout.

²<https://www.qpro.cz/Vlastnosti-vlhkeho-vzduchu>

$\frac{R}{\text{cm}}$	10	8	6	4	2
1	1,433	1,366	1,333	1,267	1,166
2	1,467	1,433	1,333	1,333	1,100
3	1,567	1,400	1,300	1,300	1,200
4	1,399	1,366	1,300	1,367	1,167
5	1,533	1,399	1,367	1,300	1,200
6	1,433	1,366	1,333	1,267	1,200
7	1,433	1,399	1,300	1,233	1,200
8	1,499	1,334	1,333	1,266	1,200
9	1,466	1,366	1,300	1,300	1,200
10	1,466	1,467	1,300	1,299	1,166
$\frac{t}{\text{s}}$	1,47	1,39	1,320	1,29	1,18
$\frac{\sigma_A(t)}{\text{s}}$	0,02	0,02	0,007	0,01	0,01
$\frac{\sigma_B(t)}{\text{s}}$	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019
$\frac{\sigma(t)}{\text{s}}$	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02
$\frac{v}{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$	1,36	1,44	1,52	1,56	1,68
$\frac{\sigma(v)}{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04

Tabulka 1: Měření času pádu v závislosti na poloměru R *Diskuse a závěr*

Pro získání větší přesnosti bylo k měření použito natáčení na kameru a jeho analýza na počítači. To snižovalo nepřesnosti měření času, na druhou stranu ale ovlivňovalo vzdálenost perspektivním zkreslením. V závislosti druhé mocniny rychlosti na poloměru R vidíme sice velké nejistoty, ale charakter závislosti je zde zcela jasný. Naměřený koeficient odporu je $C = 0,58 \pm 0,02$. Ve srovnání se známými tělesy jde o hodnotu mezi odporovým koeficientem koule 0,33 odporovým koeficientem roviny 1,2, tedy získaná hodnota je realistická. Naměřená data odpovídala předpokládané vzdálenosti, to znamená, že vztlaková síla má na padající kornoutek nezanedbatelný



Obrázek 3: Čtverec terminální rychlosti měřených kornoutů

vliv.³

Kateřina Rosická
kackar@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

³Kdyby byl zanedbatelný, dostali bychom stejnou rychlost pro všechny rozměry.