

Úloha V.5 ... Perfektní koulení

7 bodů; průměr 4,68; řešilo 22 studentů

Jarda vytvářel stroj, jehož součástí byly kuličky, které se kutálely z výšky h . Když ale stroj dokončil, zjistil, že jeho kuličky po skutálení nemají dostatečnou rychlost. Chvilí se zamyslel a došlo mu proč: jeho kuličky se příliš točí.



Jarda je totiž pouštěl nikoliv po skluzavce, kde se dotýkají podložky spodkem, nýbrž po kolejkách. V takovém případě se kulička dotýká kolejí ze dvou stran tak, že úhel mezi bodem dotyku s kolejí a spodkem kuličky je 45° . V obou případech kulička nepodkluzuje, to znamená, že její posuvná rychlost je stejná jako rotační rychlost styčného bodu kuličky s podložkou.

Jardovy kuličky mají poloměr r a hmotnost m . Jejich moment setrvačnosti je $J = 2/5mr^2$, z čehož vyplývá, že při rotaci s úhlovou rychlostí ω mají kinetickou energii rotace $E_k = 1/2J\omega^2$.

1. Jakou rychlost by kuličky po sjezdu měly, pokud by byly velmi malé, a dala by se tak zanedbat jejich rotační energie?
2. Jakou rychlost by skutečné kuličky po sjezdu měly, pokud by jely po skluzavce?
3. Jakou rychlost mají, když sjíždějí po kolejkách?
4. Jaký je poměr rychlostí kuliček po sjezdu po skluzavce a po sjezdu po kolejkách?

1. Pokud můžeme zanedbat rotační energii kuliček, předpokládáme, že se veškerá potenciální energie kuliček ve výšce h přeměnila na kinetickou energii. Zapsáno rovnicí tedy platí

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2,$$

což je asi nejčastější podoba zákona zachování mechanické energie, kterou známe ze školy. Z takového vzorce již rychlost v_1 snadno vyjádříme:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}.$$

Při zanedbání rotační energie tedy dostáváme rychlost průjezdu kuliček $v_1 = \sqrt{2gh}$.

2. Zde již musíme opustit idealizaci kuliček a započítat i jejich rotační energii. Když dosadíme vzorec pro moment setrvačnosti $J = 2/5mr^2$ do vztahu pro energii rotace, dostáváme

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{2}{5}mr^2\omega^2 = \frac{1}{5}mr^2\omega^2.$$

Teď tuto energii zapracujeme do zákona zachování energie. Na začátku bude nulová, takže ji stačí přičíst na pravou stranu. Pak máme doplněnou rovnost

$$mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{5}mr^2\omega^2.$$

Když budeme z rovnosti výše chtít vyjádřit v_2 , narazíme na problém, protože v něm figuruje další neznámá – úhlová rychlost ω . Zde využijeme podmínky, že kuličky nepodkluzují, tudíž je jejich posuvná rychlost stejná jako rotační rychlost bodu na povrchu kuličky. Víme totiž, že pro úhlovou rychlost platí

$$\omega = \frac{v_o}{r},$$

kde v_o je obvodová rychlost, kterou na základě podmínky o prokluzování můžeme nahradit rychlostí v_2 . Když toto vyjádření úhlové rychlosti dosadíme do předchozí rovnice, dostáváme

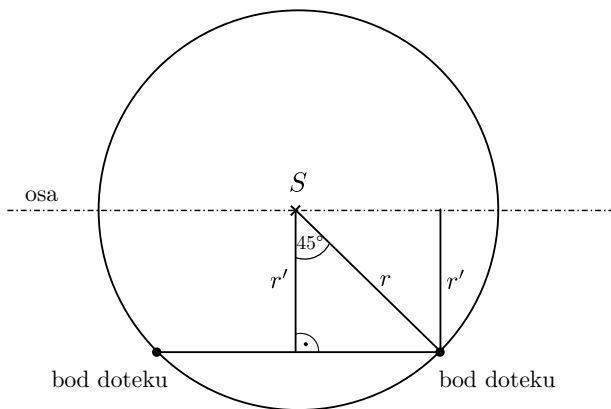
$$mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{5}mr^2 \left(\frac{v_2}{r} \right)^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{5}mv_2^2 = \frac{7}{10}mv_2^2.$$

Teď nám již nic nebrání si z rovnosti vyjádřit rychlost v_2 :

$$mgh = \frac{7}{10}mv_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{10gh}{7}}.$$

Vidíme, že když započítáme rotační energii, vychází nám rychlost jako $v_2 = \sqrt{10gh/7}$, tedy o něco menší než rychlost z bodu 1, což se dalo předpokládat, neboť část energie se uložila do rotace kuličky.

3. Rozdíl mezi kutálením po skluzavce a po kolejkách možná není na první pohled úplně zřejmý, ale když se pozorněji podíváme, uvědomíme si, že se liší vzdálenost mezi styčným bodem kuličky s podložkou a osou otáčení kuličky. Zatímco v případě sjezdu po skluzavce se kulička dotýká skluzavky ve vzdálenosti r od osy otáčení, zde tomu bude jinak. Když jede kulička po kolejkách, je vzdálenost styčných bodů, jejichž obvodovou rychlost známe, od středu jen r' (jak vidíme z obrázku).



Obrázek 1: Průřez kuličkou a její body doteku

Zákon zachování energie pak má tvar

$$mgh = \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{5}mr^2 \left(\frac{v_3}{r'} \right)^2.$$

Všimněme si, že nemůžeme jen tak všechna r zaměnit za r' , protože poloměr ve vzorci pro moment setrvačnosti bude stále stejný, mění se jen vzdálenost styčného bodu kolejnic a kuličky, která určuje úhlovou rychlost. Opět se však dostáváme do situace, kdy máme ve vzorci dvě neznámé: v_3 , kterou chceme zjistit, a r' . Poloměr r' si tedy musíme vyjádřit

pomocí známého r . Při pohledu na obrázek zjistíme, že poloměr kuliček r je v podstatě úhlopříčka čtverce se stranou r' a pro úhlopříčku z Pythagorovy věty platí $u = a\sqrt{2}$, z čehož již vyjádříme poloměr r' :

$$r = r'\sqrt{2} \Rightarrow r' = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

Poslední úprava spočívá v rozšíření zlomku (vynásobení čitatele i jmenovatele stejným výrazem) odmocninou ze dvou, čímž se jí zbavíme ve jmenovateli, kde by se pro další úpravy neměla vyskytovat.

Když dosadíme takto vyjádřený poloměr do zákona zachování energie, dostáváme

$$mgh = \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{5}mr^2 \left(\frac{v_3}{\frac{r\sqrt{2}}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{5}mr^2 \frac{2v_3^2}{r^2}.$$

Po zkrácení poloměrů r máme

$$mgh = \frac{9}{10}v_3^2 \Rightarrow v_3 = \sqrt{\frac{10gh}{9}}.$$

Jak vidíme, při kutálení po kolejích bude rychlost menší než při kutálení po skluzavce.

4. Zde hledáme hodnotu poměru v_2/v_3 . Podle předchozích výpočtů můžeme psát

$$\frac{v_2}{v_3} = \frac{\sqrt{\frac{10gh}{7}}}{\sqrt{\frac{10gh}{9}}} = \sqrt{\frac{10gh}{7} \frac{9}{10gh}} = \sqrt{\frac{9}{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \doteq 1,13.$$

Vidíme, že se nám všechny veličiny zkrátí a zbude jen obyčejný číselný zlomek, který opět rozšíříme. Výsledný poměr mezi rychlostí kuliček po sjezdu po skluzavce a tou, kterou mají po sjezdu po kolejích, je přibližně 1,13.

Lukáš Linhart
lukasl@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.