

Úloha V.2 ... Poločas kofeinu

5 bodů; průměr 4,50; řešilo 26 studentů

Když vypijeme kávu, dostane se do našeho těla látka zvaná kofein, díky které se cítíme více aktivní. Tato látka je postupně vyplavována a její účinky slábnou. Vyplavování však probíhá nikoliv skokově, nýbrž postupně: za zhruba $T = 6,0$ h se vyplaví půlka kofeinu (tento poločas samozřejmě závisí na každém člověku, jedná se jen o odhad).

Dejme tomu, že pijete pravidelně každý den ve čtyři hodiny odpoledne jednu kávu, která obsahuje $d = 100$ mg kofeinu. Kolik kofeinu v sobě budete mít každý den po velmi dlouhé době ve čtyři hodiny odpoledne? Kolik kofeinu v sobě budete mít ve 22:00 každý den po velmi dlouhé době? (Velmi dlouhou dobu si můžeme představit třeba jako rok.)



Předpokládejme, že jsme si v prvním případě kávu ve čtyři už dali, i když to v zadání není explicitně uvedeno. To znamená, že se nám do těla nově dostalo 100 mg kofeinu. Zároveň ale musíme započítat i kofein, který v těle zůstal z předchozích dnů. Během čtyřiaadvaceti hodin uplyne poločas rozpadu kofeinu čtyřikrát, proto je množství kofeinu v těle z každého dne vždy šestnáctkrát menší než ze dne následujícího. Zvolíme-li si jako hledané množství kofeinu neznámou x , pak můžeme tento poznatek zapsat do rovnice.

$$x = 100 \text{ mg} + \frac{100 \text{ mg}}{2^4} + \frac{100 \text{ mg}}{(2^4)^2} + \frac{100 \text{ mg}}{(2^4)^3} + \dots$$

Každý člen reprezentuje kofein, který v našem těle zbyl po určitém dni. Kolik členů tato řada má? Zadání říká, že kofein konzumujeme velmi dlouhou dobu, takže v ideálním případě by počet členů měl růst nade všechny meze. Předpokládáme, že se konečná hodnota ustálí na určité hladině.

Dále máme v zásadě dvě možnosti, jak postupovat. Buď si všimneme, že se jedná o geometrickou posloupnost s koeficientem $1/2^4$, a tu sečteme pomocí vzorce pro součet těchto posloupností. Můžeme ale také úlohu řešit iterativně, například v Excelu, čímž dostaneme přibližný výsledek. V obou případech dospějeme k výsledku $320/3 \text{ mg} \doteq 107 \text{ mg}$.

Druhou otázku snadno vyřešíme chytrým pozorováním. Všimneme si, že u veškerého kofeinu, který jsme v těle měli v předchozím případě, uplynul navíc ještě jeden poločas rozpadu. To znamená, že nám v těle zbude přesně polovina z dříve vypočítaného množství, konkrétně $160/3 \text{ mg} \doteq 53 \text{ mg}$.

Na závěr si ukážeme, že jsme mohli postupovat ještě o něco přímočařeji, bez nutnosti počítat součet nekonečné řady. Pokud jsme měli po dlouhé době předchozí den touhle dobou v těle nějaké množství kofeinu x , tak po vydělení tohoto množství nám dobře známým koeficientem $1/2^4$ a přičtení 100 mg bychom o 24 h později měli mít v těle opět to samé množství kofeinu. Zapsáno rovnicí:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2^4} + 100 \text{ mg} &= x, \\ 100 \text{ mg} &= x(1 - 2^{-4}), \\ x &= \frac{100 \text{ mg}}{1 - 2^{-4}} \doteq 107 \text{ mg}. \end{aligned}$$

Po vyřešení této rovnice jsme dostali stejné výsledky jako iterativní metodou.

Je vhodné dodat, že výsledky dobře odpovídají tomu, jak se kofein v těle skutečně chová: pokud si dáme kávu brzy dopoledne, tak nám pozdě večer usínání neztíží, neboť většina kofeinu stihne být z těla vyplavena. Pokud si ovšem dáme kávu až večer, nebude se nám usínat tak dobře a spánek nebude tolik kvalitní.

Viktor Materna
materna@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.