

Úloha V.1 ... Loňské zlomky

5 bodů; průměr 4,50; řešilo 6 studentů

Výfuček měl sen, ve kterém se mu rozbilo zrcadlo na 2 020 stejných kousků. Když je sbíral do košíku, počítal si postupně zlomky, které reprezentovaly část zrcadla, kterou už posbíral: $1/2$ 020, $2/2$ 020, $3/2$ 020 až 2 020/2 020. Výfuček samozřejmě všechny zlomky hbitě upravil do základního tvaru. Kolik celkových zlomků, které Výfuček vyjmenoval, mělo po upravení do základního tvaru ve jmenovateli dvacítku?



Úloha se na první pohled může zdát složitá, ale po jemném přeformulování je řešení nasnadě. Místo toho, abychom začínali od zlomků $1/2$ 020, $2/2$ 020, $3/2$ 020 až 2 020/2 020 a hledali, kolik z nich se zkrátí tak, aby měly dvacítku ve jmenovateli, můžeme hledat zlomky, které mají dvacítku ve jmenovateli a které lze rozšířit na jmenovatele 2 020.

Pokud se totiž nějaký zlomek zkrátí tak, aby měl ve jmenovateli 20, můžeme ho určitě zase zpátky rozšířit! Zároveň nemůžeme žádný zlomek vynechat, protože pokud má být po zkrácení v základním tvaru, jeho čitateli mohou být pouze přirozená čísla.

Nyní už si stačí vypsát všechny zlomky od $1/20$ do $20/20$ a ujistit se, že

- jsou v základním tvaru (tedy nejvyšší společný dělitel čitatele i jmenovatele je 1)
- mohou být rozšířeny nějakým číslem na jmenovatele 2 020.

Začneme druhým bodem, ten totiž nemusíme dělat „otrocky“. Ze jmenovatele 20 se dostaneme rozšířením číslem 101 na jmenovatele 2 020. Tím jsme ukázali, že všechny naše uvažované zlomky bude možné rozšířit na jmenovatele 2 020.

Pokračujeme prvním bodem. Zde už nám nezbývá nic jiného, než si vypsát všechny možnosti.

$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{5}{20}$
$\frac{6}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{10}{20}$
$\frac{11}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{14}{20}$	$\frac{15}{20}$
$\frac{16}{20}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{19}{20}$	$\frac{20}{20}$

Jednoduše zjistíme, že vyhovují zlomky

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{20}, & \frac{3}{20}, & \frac{7}{20}, & \frac{9}{20}, \\ \frac{11}{20}, & \frac{13}{20}, & \frac{17}{20}, & \frac{19}{20}. \end{array}$$

Je jich celkem osm. Pokud bychom si chtěli ještě více usnadnit práci, mohlo by nás napadnout, že jakékoliv sudé čitatele nemá smysl zkoušet (neboť se zkrátí s dvacítkou), stejně tak jako jakékoliv násobky pěti.

Na závěr dodejme, že (nejen) matematické úlohy se často dají řešit právě jemným přeformulováním zadání. Právě pohled z jiné perspektivy odhalí možné řešení netradičních úloh.

Nikdy bychom však neměli zapomínat na patřičný důkaz (nebo aspoň jeho nástin) toho, že nové přeformulované zadání je ekvivalentní s tím původním, tedy že najdeme přesně ta

samá řešení (o nic více, o nic méně). Pokud si sami nejsme jisti, vyplatí se zkoušet vymýšlení protipříkladů, tedy nějakých situací, ve kterých nové zadání nebo řešení nefunguje.

Robert Gemrot
robert@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.