Úloha III.4 ... You spin me round...

6 bodů; průměr 4,27; řešilo 30 studentů

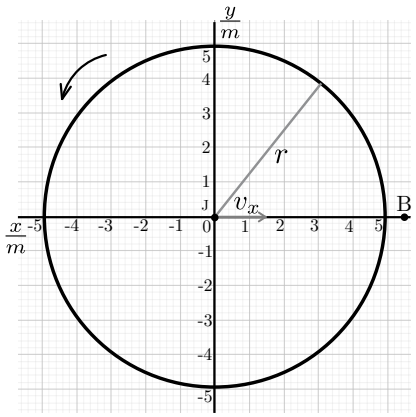
Jonatán si stoupl doprostřed kolotoče, což je disk s poloměrem $r = 5{,}0\,\mathrm{m}$, když v tom ho Barbora stojící mimo kolotoč roztočila konstantní frekvencí $f = 1{,}0\,\mathrm{Hz}$. Jonatán chtěl k Barboře přijít a napadly ho dvě možnosti, jak to udělat. Nejdříve ho napadlo, že půjde prostě rovně.

1. *Půjde-li rovnou za nosem (a zpočátku se dívá na Barboru), jakou musí jít rychlostí, aby nemusel na konci kolotoče čekat? Tj. aby přesně na konci své dráhy byl u Barbory? Pokuste se popsat všechny možné rychlosti.*

Napadla ho ale ještě jiná možnost – půjde tak, aby Barboru pořád viděl před sebou. V takovém případě ale bude jeho rychlost poněkud komplikovaná a jistě se bude v čase měnit.

2. *Zaveďte si souřadnicovou mřížku x a y (tzv. kartézské souřadnice), kde osa x bude procházet Barborou a Jonatánem na počátku. Tyto souřadnice by měly být „spojené se zemí“, tzn. že vůči nim se kolotoč bude otáčet. Vyjádřete rychlost Jonatána v těchto souřadnicích, aby při chůzi měl Barboru pořád před sebou. Tato rychlost bude záviset na čase a bude mít dvě složky (matematici by řekli, že se jedná o vektor rychlosti). Zároveň předpokládejte, že Jonatán dojde k Barboře za stejný čas jako nejmenší možný čas v předchozí úloze.*

1. Abychom nalezli všechny možné rychlosti, musíme nejprve vědět, ve kterých polohách může vyskočit. Pokud Jonatán dojde na konec, když je kolotoč ve výchozí pozici, tak nebude muset čekat. To samé platí, pokud kolotoč otočíme o úhel 360° nebo o jakýkoliv jeho celočíselný násobek z (v číslech dostaneme otočení o $z \cdot 360^\circ$; $z \in \mathbb{Z}$).



Dalším krokem je určit, za jak dlouho musí Jonatán dojít na konec kolotoče. V této otázce nám pomůže frekvence otáčení. Frekvence v hertzích udává, kolikrát se objekt otočí kolem dokola za sekundu. Pokud tedy chceme zjistit, za jak dlouho se kolotoč otočil, tak počet otočení vydělíme frekvencí a dostaneme čas

$$t = \frac{z}{f};\ z \in \mathbb{Z}\,.$$

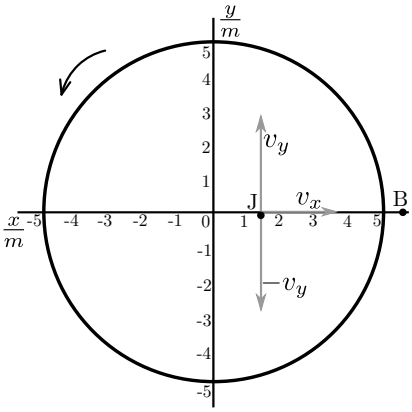
Díky tomu, že Jonatán jde rovnoměrně přímočaře (ve své vztažné soustavě vůči kolotoči), můžeme využít vzorec pro rychlost $v = r/t$. V tomto vzorci odpovídá r poloměru, ale také je to Jonatánova dráha. Čas, za jaký se Jonatán musí dostat na konec, poté značíme t. Všimněme si, že pro žádné otočení bychom dělili nulou, což není možné[1]. Pro záporný počet otočení je rychlost záporná. To totiž odpovídá tomu, že Jonatán stál nejprve na okraji a poté couval do středu. Toto se však nestalo, a proto ani to nemůže být řešení.

Jedinými řešeními tedy zůstávají přirozená čísla. Výsledek po dosazení bude

$$v = \frac{f \cdot r}{n};\ n \in \mathbb{N},$$
$$v = \frac{1\,\mathrm{Hz} \cdot 5\,\mathrm{m}}{n};\ n \in \mathbb{N}.$$

Příklady možných rychlostí Jonatána jsou $5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $2{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, nebo $\frac{5}{3}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

2. Pro řešení úlohy využijeme tzv. princip superpozice, který je součástí Newtonových pohybových zákonů. Toto cize znějící slovo označuje fakt, že když zkoumáme pohyb Jonatána, jeho celkovou rychlost dostaneme jakou součet jednotlivých složek, které přispívají k jeho rychlosti. Také si jeho rychlost můžeme rozložit do složky ve směru x (směrem k Barboře) a do směru y (kolmo ke směru x).



Nejprve se podíváme na pohyb Jonatána, jakoby zde nebyl točící se kolotoč. V takovémto případě by se Jonatán pohyboval pouze ve směru osy x. V tomto směru se tedy pohybuje rychlostí $v_x = 5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jedná se o největší z rychlostí z minulého úkolu a vzhledem k tomu, že Jonatán ujde stejnou vzdálenost r, bude mu to trvat stejný čas jako v minulém způsobu.

Když ovšem opět vrátíme kolotoč, tak kromě tohoto pohybu bude ještě třeba vyrovnat rychlost, kterou předává Jonatánovi. Kolotoč mu udělí obvodovou rychlost, kterou se otáčí v daném místě. Udělená rychlost je ve směru y, předchozí rychlost je v kolmém

[1] Odpovídalo by to totiž stání na dvou místech zároveň nebo Jonatánově nekonečné rychlosti.

směru x. Aby Jonatán rychlost vyrovnal, stačí se pohybovat opačnou rychlostí ve směru y. Jonatánovu obvodovou rychlost lze tedy vyjádřit jako

$$v_y = -\frac{2\pi l}{T} = -2\pi l f$$

(mínus je z obráceného směru). V tomto vzorci značí l momentální vzdálenost od středu. Ta se mění pouze pohybem po ose x, kolotoč ji neovlivní. Na počátku v čase $t = 0$ byla tato vzdálenost rovna 0, postupně se zvětšovala, jak se Jonatán pohyboval po dráze rovnoměrného pohybu $s = v_x \cdot t$. Dostaneme tedy[2]

$$l(t) = v_x t\,.$$

Po dosazení do rovnice získáváme složku pohybu po ose y. Tím jsme tedy získali obě složky rychlosti. Tyto zapíšeme do podoby vektoru, jak se to obvykle ve fyzice dělá:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \\ -2\pi f t \cdot 5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \end{pmatrix}.$$

Vektorového zápisu se nemusíte obávat, jedná se jen o přehledný zápis rychlosti Jonatána ve dvou směrech. Shrňme si, co jsme vypočetli:

(a) Jonatán se pohybuje směrem k Barboře rychlostí $v_x = 5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

(b) Z pohledu Barbory se Jonatán ve směru y nepohybuje. To je proto, že rychlost kolotoče $-v_y$ vyrovnává tím, jak sám chodí rychlostí v_y, takže jeho celková rychlost je nulová.

(c) Rychlost, kterou Jonatán chodí do směru v_y se v čase mění a lze ji vyjádřit jako $v_y(t) = -2\pi f t \cdot 5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

(d) Protože jsme nezadali směr, kterým Barbora kolotoč otáčí, je správné řešení i $-v_y$.

Pavel Provazník
pavelp@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.

[2] Píšeme $l(t)$, neboť l je funkce času, tj. v čase se mění.