

Úloha III.2 ... Countryballs

5 bodů; průměr 3,97; řešilo 36 studentů

Podíváte-li se na mapu Evropy s hlavními městy (třeba zde¹), možná vás zarazí, že ve většině případů nejsou hlavní města ve vnitrozemí, ale u hranice. I když vyloučíme přímořské státy (u nichž je pravděpodobné, že je hlavní město přístav), tento trend je zřejmý. Ale proč? Nebylo by pro administrativu výhodnější, kdyby hlavní město bylo ve středu země, aby ke každému místu mělo co nejbližší?



Obrázek 1: Mapa Evropy

Podíváme se na jedno možné matematické vysvětlení tohoto fenoménu: náhodu. Představme si nějaký vzorový stát, který má pro zjednodušení tvar kruhu. Když bychom na mapu tohoto státu chtěli umístit hlavní město, přičemž všechna místa by měla stejnou pravděpodobnost, s jakou pravděpodobností bychom jej umístili do vnitřku – kruhu o poloměru půl r ?

Kdo správně počítá, vidí, že zdaleka nevyšla pravděpodobnost 50 %. Jaký by musel být vnitřní poloměr vyjádřený jako násobek poloměru r , aby šance na umístění do vnitřního půlkruhu byla stejná jako šance na umístění ven?

S pojmem pravděpodobnost jste se již určitě setkali v každodenním životě. Ve zprávách například slyšíme, že je velice pravděpodobné, že bude pršet nebo že daný kandidát na prezidenta se 100 % pravděpodobností vyhraje. V matematice používáme slovní spojení pravděpodobnost jevu (v našem případě náhodného) a tuto číselnou hodnotu označujeme jako P . Pravděpodobnost P může nabývat hodnot mezi 0 a 1 – pokud je pravděpodobnost nulová, znamená to, že jev určitě nenastane, pokud je pravděpodobnost 1, znamená to, že si můžeme být jistí, že daný jev nastane. Kdybychom měli například hrací kostku, na které jsou jen samé šestky, a hodili s ní, je pravděpodobnost, že nám padne šestka, 1 a pravděpodobnost, že nám padne třeba pětka, 0.

¹https://europa.eu/european-union/sites/europaefu/files/easy_to_read/european-map_en.jpg

V souvislosti s pojmem pravděpodobnost se můžeme setkat také s procenty. To když vztahujeme pravděpodobnost ke 100%, což je naše 1. Pokud se tak něco stane s pravděpodobností $P = 0,5$, znamená to 50%, $P = 0,02$ znamená 2% apod.

Ale jak vlastně pravděpodobnost vypočítáme? Pokud nás zajímá náhodný jev (což v našem příkladu umístování města do kruhu je), potom pravděpodobnost spočítáme jako poměr příznivých událostí ku celkovému počtu možných událostí. V našem případě jsou všechny možné události body celé země, tedy kruhu. Všechny body vytvoří plochu tohoto kruhu, jehož obsah spočítáme jako $S_1 = \pi r^2$, kde π je známé Ludolfovo číslo a r je poloměr kruhu. Příznivé události jsou v našem příkladu body kruhu o polovičním poloměru než ten předchozí. Jeho obsah tak spočítáme jako $S_2 = \pi (r/2)^2$.

Pravděpodobnost, že se město bude nacházet ve vnitřním kruhu, tak spočítáme jako poměr počtu příznivých událostí ku celkovému počtu událostí, tedy

$$P = \frac{\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

To znamená 25 %.

Aby byla stejná šance na umístění do vnitřního kruhu jako na umístění ven z něj, musí být pravděpodobnost, že město bude ve vnitřním kruhu, 50%, tedy $P = 0,5$. Snažíme se zjistit, jaký zlomek poloměru to bude, proto výsledný poloměr vnitřního kruhu označíme zlomkem r/x . Zjistíme tak, že

$$\frac{\pi \left(\frac{r}{x}\right)^2}{\pi r^2} = 0,5,$$

z čehož po úpravách dostaneme tvar

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

A z toho již jednoduše dopočítáme, že $x^2 = 2$, a tedy že $x = \sqrt{2}$. Aby byla pravděpodobnost vnitřního i vnějšího kruhu stejná, musel by být poloměr vnitřního kruhu $r_v = r/\sqrt{2} \doteq 0,7r$.

Karolína Letochová
kaja@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.