

Úloha III.1 ... Vánoční dláždění

5 bodů; průměr 3,38; řešilo 8 studentů

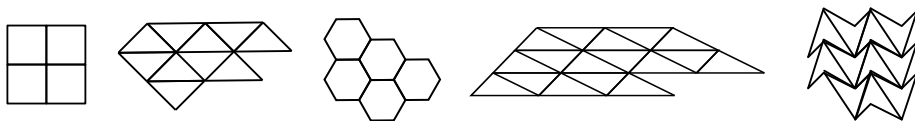
Eva pekla vánoční cukroví a jednu várku kompletně spálila, Aleš ji ale uklidnil, že to ještě není nejhorší. Třeba Pat a Mat – ti když pekli, bylo to tak tvrdé, že si z toho vydláždili chodník. Eva se zeptala, jestli by se z jejich lineckých komet dal dláždit nekonečný prostor. Aleš jí odpověděl, že ne, a oba začali přemýšlet, jaké jiné cukroví by Eva měla upéct, aby se jí to podařilo.

Dokažte, že se nekonečná plocha dláždit dá, a vymyslete alespoň 5 různých tvarů, kterými to lze (jako bonus můžete vymyslet nějaký typický tvar vánočního cukroví).



Vyplněním nekonečné plochy neboli *teselací* se zabýval již slavný matematik a astronom Johannes Kepler. Ten ve své knize *Harmonices mundi* ukázal, že z pravidelných mnohoúhelníků jde roviny pokrýt pouze třemi, a to rovnostranným trojúhelníkem, čtvercem a pravidelným šestiúhelníkem. Abychom mohli dláždit nekonečnou plochu, musí být součet vnitřních úhlů útvarů stýkajících se v jednom bodě 360° , tedy plný úhel. Jelikož pravidelné mnohoúhelníky mají všechny vnitřní úhly stejné a jasné dané typem mnohoúhelníku, musí pro hledaný útvar platit, že 360° je celočíselným násobkem vnitřního úhlu. Ten je pro trojúhelník 60° , pro čtverec 90° a pro šestiúhelník 120° , tedy po řadě šestina, čtvrtina a třetina plného úhlu. Můžete si rozmyslet, že žádným z jiných pravidelných mnohoúhelníků již nemůžeme rovinu pokrýt, protože všechny musí mít velikost vnitřních úhlů menší než 180° .

Podívejme se však i na nepravidelné útvary. Z těch se dá rovina pokrýt libovolným obecným trojúhelníkem, libovolným (i tzv. nekonvexním) čtyřúhelníkem a některými speciálními typy pětiúhelníků a šestiúhelníků. Dláždění všemi pravidelnými a dvěma nepravidelnými mnohoúhelníky můžete vidět na obrázku 1.

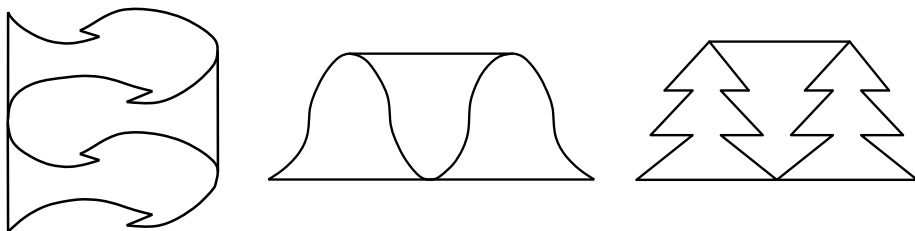


Obrázek 1: Nekonečné řady nepravidelných tvarů

My jsme se ptali na tvar vánočního cukroví, pochybujeme však, že Eva pekla cukroví ve tvaru šestiúhelníků. Útvarů, kterými jde vydláždit rovina, je totiž více, jen se již nemusí jednat o zmíněné mnohoúhelníky. Jiný obrazec vyplňující rovinu můžeme vytvořit tak, že z jedné strany čtverce nebo šestiúhelníku vystříháme útvar a ten nalepíme na protější stranu nebo na sousední stranu otáčením do jednoho směru. Z tvarů typických pro vánoční cukroví tak můžou rovinu vyplnit například stromečky, zvonky nebo ryby (obr. 2).

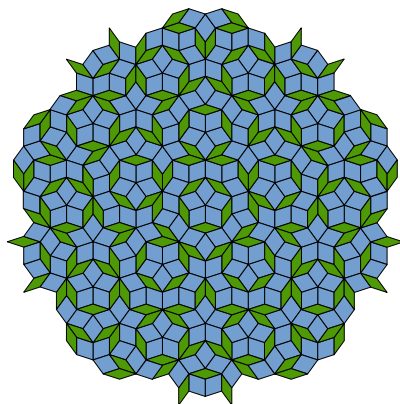
Vyplňování roviny různými útvary není pouze záležitostí matematiky, ale setkáváme se s ním v mnoha různých oborech. Již od starověku se zdobí stěny chrámů barevné mozaiky a tato výtvarná technika nezůstává pozadu ani ve dvacátém století u M. C. Eschera. Dále vyplňování roviny nalazneme v přírodě například u včelích pláství, které mají šestiúhelníkový tvar, u vyplnění tkáně buňkami či u sloupů čedičových skal (tzv. varhany, v České republice např. Panská skála u České Skalice). Tvary vyplňující rovinu mají rovněž využití v krystalografii, třeba u kubické krystalové mřížky s rovinami tvořenými čtverci nebo například u grafitu, jehož roviny jsou tvořeny šestiúhelníky.

I přes svou zdánlivou jednoduchost není problém dláždění roviny zcela vyřešen. Problémem dláždění omezeným množstvím tvarů, které není periodické (přesunutím jedné části nikdy ne-



Obrázek 2: Nekonečné řady vánočního cukroví

dostaneme shodu s jinou), ale vykazuje jisté náznaky symetrie, se zabýval i Roger Penrose!¹ Nejjednodušší Penroseovo dláždění je složeno ze dvou kosočtverců. Pevné látky, které vykazují takovéto uspořádání, byly v roce 1982 skutečně objeveny a nazýváme je kvazikrystaly.



Obrázek 3: Jeden z mnoha typů Penroseova dláždění.

Kateřina Rosická
kackar@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

¹ nositel Nobelovy ceny za fyziku 2020 za výzkum černých děr