

## Úloha II.E ... U-rampa

7 bodů; průměr 4,30; řešilo 27 studentů

Organizátoři Výfuku se rozhodli, že si zajdou na minigolf. Při hraní si všimli, že na různé dráhy se hodí různé vlastnosti míčku a že záleží na tom, jak se k jamce odpálí.

Zkuste si i vy v různých případech prozkoumat chování materiálu. Zkonstruujte si doma U-rampu ve tvaru půlkruhu s **minimální** výškou 10 cm (například z kartonu a drátků nebo ohnuté matrace). Poté si sežeňte několik malých kuliček z různých materiálů (například hopík, železnou kuličku či kuličku od myši) a pouštějte je z vrcholu rampy. Změřte, do jaké výšky jsou schopné kuličky na druhé straně rampy vyjet. Se stejnými míčky pak změřte i to, jak vysoko se odrazí, když je pustíte na zem ze stejné výšky, z jaké jste je pouštěli na U-rampě.

Porovnejte ztrátu energie při průjezdu rampou a při odrazu pro vaše kuličky. Ztrátu energie můžete popsat vydělením výsledné potenciální energie energií počáteční. V případě pádu podíl nazýváme koeficient restituce (neboli účinnost). Čím jsou rozdíly ve ztrátě energie způsobeny? Nezapomeňte, že čím vyšší dráhu zvolíte, tím přesnější výsledky obdržíte.

## Teorie

Když takto vypouštíme kuličku, neočekáváme, že se dostane do výšky, ze které byla vypuštěna, nýbrž trochu níž, poté se zastaví a dokutálí zpět. Kdybychom se na problém dívali teoreticky, ze zákona zachování energie bychom došli k závěru, že kulička by se měla donekonečna kutálet ze strany na stranu a vždy se otočit ve výšce vypuštění. Toto vysvětlení nepopisuje realitu dobře, ale to neznamená, že by zákon zachování energie neplatil.

Ve skutečnosti totiž při pohybu kulička energii ztrácí. Většinou se jedná o ztrátu přes odpadní teplo, které vzniká působením tření, ale může jít třeba i o zvuk či deformaci kuličky a její podložky. Je to právě ta energie, kterou mají na svědomí třecí síly, odpor prostředí a mnohé další okolnosti, které obvykle na konci úloh najdeme ve výčtu faktorů, které je možno zanedbat<sup>1</sup>. V případě kutálení po U-rampě musíme tuto ztrátu připisovat především valivému odporu, tření či odporu vzduchu. U pádu míčku pak ztrátu energie popisuje již zmíněný koeficient restituce, který je vlastní každé konfiguraci, materiálu a kuličce.

Jak tedy vypočítat tuto ztrátu, když známe výšku vypuštění  $h$  a výšku, do které se těleso dostane po průjezdu U-rampou,  $h_1$ ? Když zvolíme nulovou hladinu potenciální energie v nejnižším bodě, bude energie kuličky při vypuštění

$$E = mgh.$$

Obdobně můžeme najít i energii kuličky po průjezdu U-rampou (po opětovném výstupu), je to

$$E_1 = mgh_1.$$

Jelikož chceme zjistit, jaká část původní energie  $E$  se nezměnila na jiné formy, podělíme energii  $E_1$  energií  $E$ . Nazvěme si tento podíl řeckým písmenem  $\eta$  (éta). Pak máme

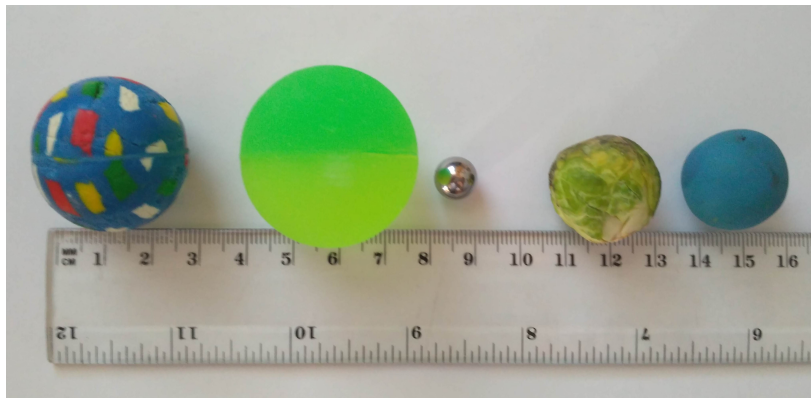
$$\eta = \frac{E_1}{E} = \frac{mgh_1}{mgh} = \frac{h_1}{h}.$$

Vidíme, že tento podíl  $\eta$ , který v případě pádu odpovídá koeficientu restituce  $k$ , je bezrozměrný a zjistíme ho jako podíl výšek, do kterých se kulička dostala.

<sup>1</sup>Tím však nechceme říct, že takové zanedbávání je špatné, právě naopak, bez něj bychom mnohdy nebyli schopni vůbec dojít k výsledku; navíc rozumné zjednodušení obvykle nevede k velkému rozporu s praxí.

## Měření

Naše U-rampa byla vytvořena z tvrdého papíru a měla výšku  $h = (30,0 \pm 0,3)$  cm, ze které také byla vypouštěna všechna tělesa. K měření jsme vybrali, jak můžeme vidět na obrázku, dva různé hopíky, kovovou kuličku, růžičkovou kapustu a kuličku z plastelíny.



Obrázek 1: Předměty vybrané pro experiment

Každý předmět byl 10krát vypuštěn z U-rampy a následně 10krát volným pádem puštěn k zemi a byla změřena výška, do které se dostal. Tato výška byla určena analýzou videozáznamu programem *Tracker*.<sup>2</sup> U každého předmětu pak byla vypočtena průměrná výška a odchylka, která je určena jako směrodatná odchylka z naměřených výšek. Hodnoty jsou shrnuty v tabulce níže.

| předmět           | $h_1$ na U-rampě | odchylka | $h_1$ po odrazu | odchylka |
|-------------------|------------------|----------|-----------------|----------|
|                   | cm               | cm       | cm              | cm       |
| hopík 1           | 21,9             | 0,4      | 22,0            | 0,3      |
| hopík 2           | 22,3             | 0,4      | 28,7            | 0,3      |
| kovová kul.       | 20,5             | 0,2      | 6,8             | 0,3      |
| kapusta           | 16,6             | 0,6      | 7,5             | 0,6      |
| plastelínová kul. | 19,6             | 0,4      | 0,0             | 0,0      |

Tabulka 1: Výsledky měření při vypouštění z výšky  $h = (30 \pm 0,3)$  cm po U-rampě, respektive volným pádem.

Z těchto hodnot si již můžeme podle vzorce odvozeného v teoretické části vypočítat  $\eta$ , respektive  $k$ , a jejich odchylky.<sup>3</sup> Tyto konečné výsledky najdeme ve druhé tabulce.

<sup>2</sup><https://physlets.org/tracker/>

<sup>3</sup>Příslušný vzorec najdeme například na stránce [https://vyfuk.mff.cuni.cz/rady\\_a\\_tipy/hokus\\_pokus](https://vyfuk.mff.cuni.cz/rady_a_tipy/hokus_pokus).

| předmět           | $\frac{\eta}{\%}$ | $\frac{\text{odchylka}}{\%}$ | $\frac{k}{\%}$ | $\frac{\text{odchylka}}{\%}$ |
|-------------------|-------------------|------------------------------|----------------|------------------------------|
| hopík 1           | 73,0              | 2,1                          | 73,3           | 1,8                          |
| hopík 2           | 74,3              | 1,8                          | 95,7           | 2,0                          |
| kovová kul.       | 68,3              | 1,4                          | 22,7           | 0,9                          |
| kapusta           | 55,3              | 2,6                          | 25,0           | 2,0                          |
| plastelínová kul. | 65,3              | 2,0                          | 0,0            | –                            |

Tabulka 2: Vypočtené hodnoty poměru  $\eta$  a koeficientu restituce  $k$  vyjádřené v procentech spolu s odchylkami. Odchylky jsou vyjádřeny v procentních bodech, nikoliv jako část z pravděpodobné hodnoty.

### Diskuze

K nepřesnostem našeho měření přispěly především chyby při měření výšek, ale také nedokonalost U-Rampy, která sice měla přibližně půlkruhový tvar, rozhodně však ne přesný. Také, zejména při průjezdu těžších předmětů, mohlo docházet k mírné deformaci U-rampy, která rozhodně výslednou výšku ovlivní. I přes to se nám podařilo změřit požadované hodnoty s relativní přesností pod 4 %, kromě kapusty, která však významně ovlivňuje přesnost svým nepříliš pravidelným tvarem. Zde dosahuje relativní nejistota i hodnoty 8 %.

### Závěr

Měřením výšek, do kterých vyjedou kuličky po U-rampě, případně vyletí po odrazu, jsme změřili ztráty energie, respektive koeficient restituce, pro různé materiály. Když se podíváme na hodnoty na U-rampě, vidíme, že se pohybují v rozmezí 20 procentních bodů, zatímco hodnoty koeficientu restituce  $k$  máme od nuly až po bezmála 96 %. Hodnota  $\eta$  závisí především na tvaru a povrchu jednotlivých těles, proto máme nejnižší hodnotu pro velmi drsnou a nepravidelnou kapustu. Naopak hodnoty koeficientu restituce jsou spjaté především s materiálem, ze kterého je daný předmět vyroben. Pro hopíky, u kterých je co největší hodnota  $k$  vyžadována, mohou být velmi blízko stu procentům. Hopíky jsou také jediné předměty, pro které je  $k > \eta$ , tedy je výhodnější je pouštět volným pádem než po U-rampě. S tvrdšími materiály, jakým je třeba kapusta či kovová kulička, se koeficient restituce snižuje, až se u plastelíny dostane na nulu – ta totiž veškerou energii spotřebuje na svou nevratnou deformaci.

**Lukáš Linhart**  
lukas1@vyfuk.org

---

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.