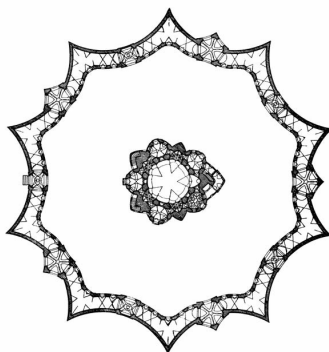


Úloha I.V ... Krystaly

7 bodů; průměr 5,36; řešilo 45 studentů

1. Český architekt Jan Blažej Santini proslul svými stavbami, ve kterých hojně užíval symetrií a numerologie. Zaměřme se na to, jakým způsobem Santini využil symetrií při stavbě proslulého kostela sv. Jana Nepomuckého na Zelené hoře. Nalezněte a popište všechny rotační a zrcadlové symetrie vnější zdi kostela, kterou můžete vidět na přiloženém půdorysu (za různé rotační symetrie se považují i ty, které se liší úhlem pootočení). Do obrázku zakreslete i příslušné osy a středy symetrie (prvky symetrie).
2. Ve Výfučení byla krátce zmíněna obdélníková krystalická mřížka. Vytvořte náskres této mřížky pro hrany a a b , kde $b = 2a$. Jaké symetrie tato mřížka má?



Obrázek 1: Půdorys vnější zdi a kostela sv. Jana Nepomuckého

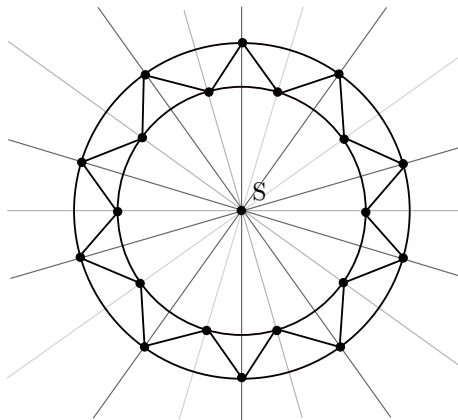
1. Jelikož hledáme symetrie vnější zdi, která je vykreslena velmi složitě, zjednodušíme si ji na desetícípou hvězdu. Důležité je si předem ujasnit, že budeme hledat pouze prvky symetrie k operacím rotace a zrcadlení, protože ty byly ve Výfučení podrobně popsány. Začneme tedy operací zrcadlení.

Prvkem zrcadlení bude vždy přímka a útvary, které zůstanou na obou stranách, budou v případě symetrie shodné. Z toho vyplývá, že není možné rozdělit stěnu tak, aby rozdělení neprocházelo středem hvězdy (na obrázku bod S). Další krok, který povede k jednoduššímu nalezení symetrií, je nalezení základního tvaru.

V této hvězdě se opakují cípy, ale nejsou základním tvarem, protože je můžeme dále rozdělit a sledovat pouze symetrie mezi částmi různých cípů. Existuje například zrcadlová symetrie při ose (přímce) procházející polovinami (vrcholy) libovolné dvojice protilehlých cípů. Přímka v takovém případě také prochází středem.

Jaké existují další přímky? Jednou variantou, jak už jsme uvedli, je přímka procházející vrcholy cípů a středem. Druhou variantou jsou však ještě přímky procházející protilehlými rozhraními cípů (prohlubněmi) a opět středem. Vybereme-li si první cíp a budeme-li se posouvat po obvodě kostela, máme zrcadlení u 1., 2., 3., 4. a 5. cípu a také mezi cípy, což

už by bylo 10 zrcadlových symetrií. Pokud bychom však pokračovali dokola k 6. cípu nebo rozhraní mezi cípy, nastává problém: taková přímka už tu je! (Šlo o symetrii procházející tím prvním cípem.) Proto nenacházíme další symetrii. Existuje tudíž pouze zmíněných 10 symetrií zrcadlení.



Obrázek 2: Deseticípá hvězda s osami zrcadlení

Následuje rotační symetrie. U této symetrie nás zajímá, kolem kterého bodu a o jaký úhel se bude otáčet. Střed hvězdy (S) je jediný bod, kolem něhož se budou posouvat vrcholy na místa dalších vrcholů (po opsaných kružnicích). Tento střed je pak také prvkem rotační symetrie. Nyní jen potřebujeme vědět, o jaké všechny úhly můžeme hvězdu otočit. Hvězdu budeme otáčet po jednotlivých cípech (tj. o $360^\circ/10 = 36^\circ$) a to po i proti směru hodinových ručiček. Otočení proti směru hodinových ručiček je však stejné jako otočení o více než 5 cípů. Celkem tedy máme 9 možných otočení (protože otočení o 10 cípů se nepočítá stejně jako otočení o 0 cípů).

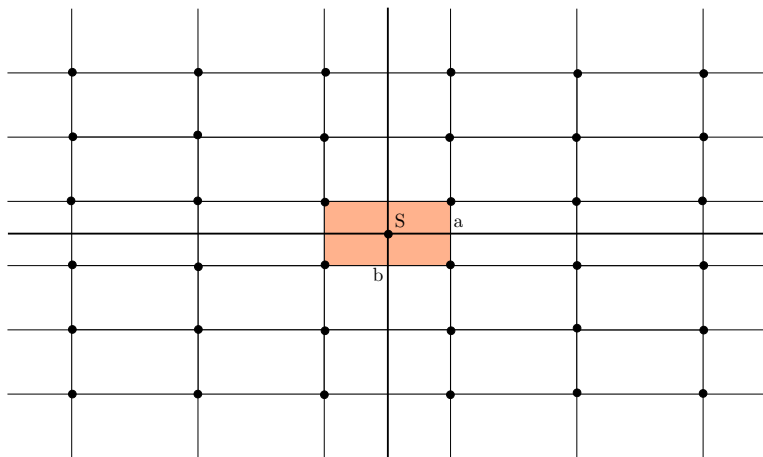
Zajímavé je, že všechny tyto symetrie souvisí se středem hvězdy. Tato vlastnost platí i pro inverzi (středovou souměrnost), která zde má svůj jediný střed.

Celkem má tedy kostel 9 rotačních a 10 zrcadlových symetrií, dohromady 19 symetrií. Středová souměrnost by mohla být počítána jako 20. symetrie.

2. V této části se již jedná o krystal, ten musí mít z definice translační symetrii. Níže je nakreslena krystalická mřížka, představována spoustou na sebe navazujících obdélníků.

Ve Výfučení jsme se seznámili s operacemi symetrie rotace, zrcadlení, translace a inverze. V hledání jednotlivých symetrií začneme translační symetrií, která je zjevná. Translační symetrii uvažujeme v rámci celé mřížky, kterou považujeme za nekonečnou. Taková symetrie je například posunutí celé mřížky o vzdálenost a ve směru strany o délce a . To stejné platí i pro jakýkoliv celočíselný násobek této vzdálenosti a i pro druhou stranu obdélníku (posuny ve směru kolmém).

Dále budeme pokračovat inverzí, ale už pouze jednoho obdélníku. Takový bod má obdélník jen jeden a to na průsečíku úhlopříček, resp. os stran.



Obrázek 3: Krystalická mřížka tvořená obdélníky

Rotační symetrie bude mít střed otáčení také v onom bodě. Otočení je možné v tomto případě pouze o 180° .

Poslední operace symetrie je zrcadlení. U něj opět bude procházet přímka předcházejícím bodem. Osy zrcadlení se budou totiž shodovat s osami stran (protilehlé strany mají navíc osy shodné). Obdélník (na rozdíl od čtverce) není zrcadlově symetrický dle úhlopříček.

Po prověření všech symetrií vidíme, že tento krystal má všechny symetrie uvedené ve Výfučení a pokud vezmeme vážně, že různé translace jsou definovány posunem o různé násobky a (či b v kolmém směru), má nekonečná obdélníková mřížka nekonečné množství symetrií.

Pavel Provažník
pavelp@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.