

Úloha I.3 ... Voňavá jímka

6 bodů; průměr 4,98; řešilo 51 studentů

Jelikož se minulý ročník Výfuku vydal, odměnil Výfuček organizátory pobytem v parádní chatě u hranic naší vlasti. Organizátoři velmi rychle zjistili, že chata má jímku o objemu 2 m^3 , a co lepšího s jímkou dělat než sledovat její teplotu?

Dejme tomu, že každý organizátor se sprchuje přesně 40 l vody. V jínce se po příjezdu nacházelo přesně 120 l vody o teplotě 6°C . Viktor dostal za úkol vypočítat předpokládanou teplotu, na které se ustálí voda v ní, jestliže se zimomřivá Soňa bude sprchovat vodou o teplotě 38°C . Zajímalo ho také, kolik stupňů bude mít voda v jínce, jestliže se následně půjde sprchovat otužilý Marco, který má rád vodu o teplotě 6°C . Pomozte Viktorovi vypočítat obě teploty za předpokladu, že teplo z vody se neuvolňuje jinde než do vody.

Matěj pak měřením ověřoval Viktorův předpoklad. Jakou teplotu by naměřil po Sonině sprše, jestliže se ve skutečnosti tepelné výměny účastnil i vzduch v jínce? Mohl naměřit rozdíl oproti teplotě vypočtené Viktorem, pokud jeho teploměr jako nejmenší dílky ukazuje desetiny stupně Celsia? Počítejte s tím, že před Soninou sprchou byla jímka se vzduchem v tepelné rovnováze. Měrná tepelná kapacita vody je $4\,200\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a vzduchu $1\,010\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Hustota vzduchu je $1,200\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a vody $1\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

K řešení této úlohy použijeme kalorimetrickou rovnici. Předtím si ale zavedeme jednotlivé veličiny. Celkový objem jímky si označíme jako $V_0 = 2\text{ m}^3$, dále je důležitý objem vody, kterým se každý organizátor sprchuje, tedy $V = 40\text{ l}$. Počáteční objem vody v jínce označíme jako $V_j = 120\text{ l}$. Hustotu vody v jínce označíme $\rho = 1\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a hustotu vzduchu $\rho_{\text{vz}} = 1,200\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Tepelné kapacity vody, respektive vzduchu jsou $c_{\text{vo}} = 4\,200\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, respektive $c_{\text{vz}} = 1\,010\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Nakonec nám zbývá si označit jednotlivé teploty vody, kterou se organizátoři sprchují, tedy pro Soňu $t_S = 38^\circ\text{C}$ a pro Marca $t_M = 6^\circ\text{C}$. Počáteční teplota jímky je opět $t_0 = 6^\circ\text{C}$. Teplotu vody po Sonině sprše označíme t_k .

Nyní se můžeme pustit do řešení kalorimetrické rovnice. Vyjdeme z předpokladu, že teplo, které přijme voda v jínce ke svému ohřevu, bude stejně velké jako teplo, které voda ze sprchy vydá, tedy

$$m_j c_{\text{vo}}(t_k - t_0) = m c_{\text{vo}}(t_S - t_k),$$

kde m_j , respektive m jsou hmotnosti vody v jínce a vody, která přiteče po Sonině sprše. Tyto členy nahradíme součinem hustoty vody a příslušného objemu.

$$V_j \rho c_{\text{vo}}(t_k - t_0) = V \rho c_{\text{vo}}(t_S - t_k)$$

Úpravami vyjádříme hledanou konečnou teplotu t_k , na které se voda v jínce ustálí. Jelikož spolu mícháme vodu a vodu, hustota i měrná tepelná kapacita obou látek jsou stejné a z rovnice se vykrátí.

$$V_j(t_k - t_0) = V(t_S - t_k)$$

$$V_j t_k - V_j t_0 = V t_S - V t_k$$

$$t_k(V_j + V) = V t_S + V_j t_0$$

$$t_k = \frac{V t_S + V_j t_0}{V + V_j}$$

$$t_k = \frac{40\text{ l} \cdot 38^\circ\text{C} + 120\text{ l} \cdot 6^\circ\text{C}}{40\text{ l} + 120\text{ l}} = 14^\circ\text{C}$$

Po dosazení nám vyšla výsledná teplota jímky $t_k = 14^\circ\text{C}$.

Nyní se jde sprchovat Marco. Vyjdeme ze stejné rovnice, ale musíme si dát pozor, neboť objem vody v jímce se změnil (nyní je tam $V_j' = 1601$ kvůli tomu, že se Soňa sprchovala). Máme tak rovnici

$$m_j' c_{\text{vo}}(t_k - t_k') = m c_{\text{vo}}(t_k' - t_M),$$

kde m_j' a m jsou hmotnosti vody v jímce a vody, kterou se sprchoval Marco, t_k' je teplota, na které se po Marcově sprše voda v jímce ustálí, a t_k je počáteční teplota vody v jímce.

Po dosazení za hmotnosti a zkrácení hustot a měrných tepelných kapacit vyjádříme hledanou teplotu t_k'

$$t_k' = \frac{V_j' t_k + V t_M}{V + V_j'}$$

a dosadíme číselné hodnoty

$$t_k' = \frac{1601 \cdot 14^\circ\text{C} + 401 \cdot 6^\circ\text{C}}{401 + 1601} = 12,4^\circ\text{C},$$

čímž nám vyjde teplota v jímce po Marcově sprše přibližně $12,4^\circ\text{C}$.

V poslední části úlohy musíme navíc do našich úvah započítat i ohřev vzduchu v jímce. Před Soninou sprchou je v jímce objem vody V_j , takže vzduchu tam je $V_0 - V_j$. Vzduch se ohřívá z $t_0 = 6^\circ\text{C}$, neboť musí mít stejnou teplotu jako voda (jsou v tepelné rovnováze), na teplotu t . Kalorimetrická rovnice pak bude vypadat

$$(V_0 - V_j) \rho_{\text{vz}} c_{\text{vz}}(t - t_0) + V_j \rho c_{\text{vo}}(t - t_0) = V \rho c_{\text{vo}}(t_S - t).$$

Je zřejmé, že tentokrát se nám hustoty ani měrné tepelné kapacity vody nezkrátí, neboť už nemícháme stejnou látku, ale přibyl nám tam vzduch. Nejdříve tedy roznásobíme závorky

$$(V_0 - V_j) \rho_{\text{vz}} c_{\text{vz}} t - (V_0 - V_j) \rho_{\text{vz}} c_{\text{vz}} t_0 + V_j \rho c_{\text{vo}} t - V_j \rho c_{\text{vo}} t_0 = V \rho c_{\text{vo}} t_S - V \rho c_{\text{vo}} t,$$

poté vytkneme hledanou teplotu t

$$t((V_0 - V_j) \rho_{\text{vz}} c_{\text{vz}} + V_j \rho c_{\text{vo}} + V \rho c_{\text{vo}}) = (V_0 - V_j) \rho_{\text{vz}} c_{\text{vz}} t_0 + V_j \rho c_{\text{vo}} t_0 + V \rho c_{\text{vo}} t_S,$$

a nakonec vydělíme členem u t , abychom t vyjádřili

$$t = \frac{(V_0 - V_j) \rho_{\text{vz}} c_{\text{vz}} t_0 + V_j \rho c_{\text{vo}} t_0 + V \rho c_{\text{vo}} t_S}{(V_0 - V_j) \rho_{\text{vz}} c_{\text{vz}} + V_j \rho c_{\text{vo}} + V \rho c_{\text{vo}}}.$$

Dosadíme, abychom získali výslednou teplotu

$$t = \frac{(1,88 \cdot 1,2 \cdot 1010 \cdot 6 + 0,12 \cdot 1000 \cdot 4200 \cdot 6 + 0,04 \cdot 1000 \cdot 4200 \cdot 38) \text{ J}}{(1,88 \cdot 1,2 \cdot 1010 + 0,12 \cdot 1000 \cdot 4200 + 0,04 \cdot 1000 \cdot 4200) \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}.$$

Po spočtení jednotlivých součinů jsou téměř konečný mezivýsledek a konečný výsledek:

$$t = \frac{13671 \text{ J} + 3024000 \text{ J} + 6384000 \text{ J}}{2279 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} + 504000 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} + 168000 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}} \doteq 13,97^\circ\text{C}.$$

Od minulých 14°C se náš nový výsledek neliší ani o desetinu stupně, takže bychom pomocí teploměru nepoznali rozdíl. Dává to smysl, neboť vzduch má hustotu asi tisíckrát menší než voda, takže jeho hmotnost je zanedbatelná, a tak je jeho vliv dostatečně malý, i když má poměrně velkou tepelnou kapacitu.

Na závěr bychom ještě chtěli dodat, že výpočet teploty se započtením vzduchu by šel provést trochu jinak a jednodušeji. Vzhledem k tomu, že se při výměně tepla neztrácí teplo, mohli bychom počítání rozdělit: spočítat si nejdřív, na jaké teplotě se ustálí voda v jímce a voda po sprše Soni, a následně na jaké teplotě se ustálí tato směs se vzduchem. První výměnu jsme již spočítali výše, takže by výpočet zabral méně místa.

Martina Daňková
martina@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.