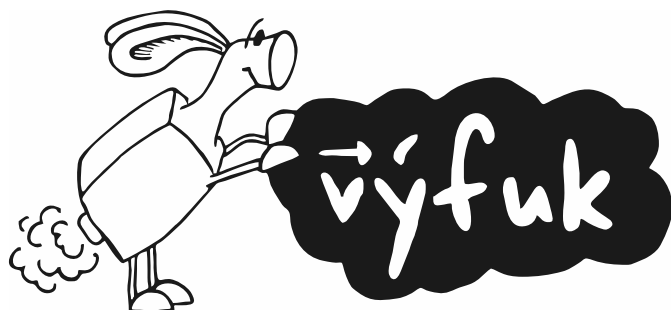




výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

s jarem přichází i další brožurka Výfuku se zadáním předposlední, páté série. V ní si uvědomíte, jak moc lidi ovlivňuje pití kávy, proč je nám při vysávání teplo a proč nás z roušky bolí uši. Výfučení se tentokrát týká matematiky, a to poměrně neznámé oblasti fraktálů. V brožurce rovněž naleznete vzorová řešení 3. série a průběžné pořadí po ní.

Podle tohoto pořadí budeme v průběhu března a dubna zvát na náš letní tábor, který, pokud bude příznivá situace, proběhne 25. 7. – 7. 8. 2021 v Celném v Orlických horách.

Abyste však nemuseli čekat až do léta, nachystali jsme si pro vás zbrusu novou akci nazvanou *Výfučí Kyber Koncil*, která proběhne online na našem Discordu 20.–21. března. Přihlašovat se již můžete v naší databázi, kde odevzdáváte úlohy. Program Kyber Koncilu naleznete na našem webu. Jelikož bychom chtěli pro vás tuto akci udělat co nejvíce interaktivní, můžete se kromě přednášek a her těšit na unikátní Výfučí přednáškovou noc, která bude v neděli odpoledne. Budeme moc rádi, pokud si na ni připravíte krátký příspěvek.

Organizátoři

`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`



Zadání V. série



Termín odeslání: 5. 4. 2021 20.00

Úloha V.1 ... Loňské zlomky ⑥ ⑦

5 bodů

Výfuček měl sen, ve kterém se mu rozbilo zrcadlo na 2 020 stejných kousků. Když je sbíral do košíku, počítal si postupně zlomky, které reprezentovaly část zrcadla, kterou už posbíral: $1/2$ 020, $2/2$ 020, $3/2$ 020 až $2\ 020/2\ 020$. Výfuček samozřejmě všechny zlomky hbitě upravil do základního tvaru. Kolik celkových zlomků, které Výfuček vyjmenoval, mělo po upravení do základního tvaru ve jmenovateli dvacítku?



Úloha V.2 ... Poločas kofeinu ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

5 bodů

Když vypijeme kávu, dostane se do našeho těla látka zvaná kofein, díky které se cítíme více aktivní. Tato látka je postupně vyplavována a její účinky slábnou. Vyplavování však probíhá nikoliv skokově, nýbrž postupně: za zhruba $T = 6,0$ h se vyplaví půlka kofeinu (tento poločas samozřejmě závisí na každém člověku, jedná se jen o odhad).

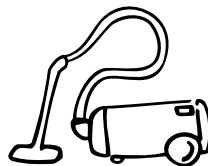
Dejme tomu, že pijete pravidelně každý den ve čtyři hodiny odpoledne jednu kávu, která obsahuje $d = 100$ mg kofeinu. Kolik kofeinu v sobě budete mít každý den po velmi dlouhé době ve čtyři hodiny odpoledne? Kolik kofeinu v sobě budete mít ve 22:00 každý den po velmi dlouhé době? (Velmi dlouhou dobu si můžeme představit třeba jako rok.)



Úloha V.3 ... (Ne)účinný vysavač ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Když Martin po patnácti minutách skončil s vysáváním v pokoji, zdálo se mu, že se v místnosti nějak oteplilo. A opravdu, v pokoji, kde bylo před vysáváním 20°C , se zvedla teplota o $\Delta T = 3^\circ\text{C}$. Martin nad tím uvažoval a uvědomil si, že jeho vysavač není dokonalý, a proto část energie uvolní jako teplo. Vypočítejte účinnost η tohoto vysavače s příkonem $P = 2,0$ kW, když objem vzduchu, který veškeré teplo pohltí, je $V = 40$ m³, jeho hustota je $\rho = 1,2$ kg·m⁻³ a jeho měrná tepelná kapacita $c = 1\ 010$ J·kg⁻¹·K⁻¹. Předpokládejme, že ztráty způsobené generováním tepla jsou jediné energetické ztráty vysavače.



Úloha V.4 ... Síla roušky ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Lukáše už z nošení roušky bolely uši, a tak se rozhodl spočítat, jakou silou asi rouška za ucho, které považujeme za jediný bod, tahá. Gumička roušky je v klidovém stavu dlouhá $l = 12$ cm a je připevněna na boční stranu roušky (která se nenatahuje) s délkou $d = 8$ cm. Tuhost gumičky k uvažujte jako 10 N·m⁻¹. Jakou silou tahá rouška za ucho, když po nasazení roušky svírají konce gumičky úhel 60° a ucho je uprostřed délky natažené gumičky?

Úloha V.5 ... Perfektní koulení ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ★

7 bodů

Jarda vytvářel stroj, jehož součástí byly kuličky, které se kutálely z výšky h . Když ale stroj dokončil, zjistil, že jeho kuličky po skutálení nemají dostatečnou rychlost. Chvilí se zamyslel a došlo mu proč: jeho kuličky se příliš točí.

Jarda je totiž pouštěl nikoliv po skluzavce, kde se dotýkají podložky spodkem, nýbrž po kolejkách. V takovém případě se kulička dotýká kolejí ze dvou stran tak, že úhel mezi bodem dotyku s kolejí a spodkem kuličky je 45° . V obou případech kulička nepodkluzuje, to znamená, že její posuvná rychlost je stejná jako rotační rychlost styčného bodu kuličky s podložkou.

Jardovy kuličky mají poloměr r a hmotnost m . Jejich moment setrvačnosti je $J = 2/5mr^2$, z čehož vyplývá, že při rotaci s úhlovou rychlostí ω mají kinetickou energii rotace $E_k = 1/2J\omega^2$.

1. Jakou rychlost by kuličky po sjezdu měly, pokud by byly velmi malé, a dala by se tak zanedbat jejich rotační energie?
2. Jakou rychlost by skutečné kuličky po sjezdu měly, pokud by jely po skluzavce?
3. Jakou rychlost mají, když sjíždějí po kolejkách?
4. Jaký je poměr rychlostí kuliček po sjezdu po skluzavce a po sjezdu po kolejkách?



Úloha V.E ... Padající kornoutky ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Když těleso padá volným pádem, tak sice nejprve zrychluje, ale poté dosáhne své nejvyšší *terminální rychlosti*, která zůstává po zbytek pádu konstantní. V měření u této úlohy použijeme tělesa, která dosáhnou terminální rychlosti brzy, a to papírové kornoutky. Když papírový kornoutek padá, působí na něj jednak gravitační síla, jednak odporová síla prostředí, kterou můžeme odhadnout jako

$$F_O = \frac{1}{2}C\rho S v^2,$$

kde v je rychlost kornoutku, S jeho průřez, ρ hustota vzduchu a C je *Newtonův odporový koeficient*, který je konstantou pro těleso daného tvaru (nezávisle na velikosti). Dvě působící síly jsou v okamžiku, kdy má těleso terminální rychlost, v rovnováze.

Váším úkolem bude změřit závislost terminální rychlosti papírového kornoutku na jeho velikosti při stejném vrcholovém úhlu. Každé měření několikrát opakujte a výsledek vyneste graficky. Naměřené hodnoty pak porovnejte se závislostí, kterou teoreticky předpovíte. Na základě toho určete velikost Newtonova odporového koeficientu kornoutků.

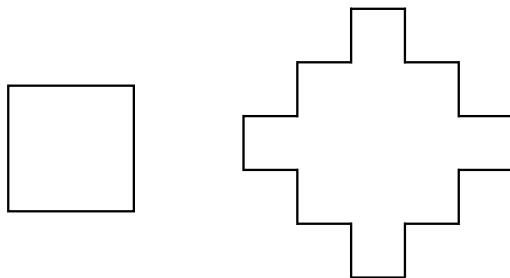
Nápověda: Nemáte-li doma dostatečně přesnou váhu, můžete hmotnost kužele určit z gramáže uvedené na balení papíru. Běžný kancelářský papír má 80 g na m^2 .

Úloha V.V ... Podivná vložka ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Ve Výučtení jsme si detailně představili fraktál zvaný Kochova vložka. Nyní si ji mírně modifikujeme a budeme zkoumat její vlastnosti. Základem naší vložky bude čára v podobě obvodu čtverce a každý krok bude probíhat tak, že jednu jeho stranu rozdělíme na třetiny a prostřední třetinu prodloužíme tak, aby mohla tvořit menší čtverec přiložený k původnímu (viz obrázek 1).

1. Jaká bude délka útvaru po n -tém kroku? Co se s délkou bude dít, pokud budeme n zvětšovat? Ustálí se na nějaké konkrétní hodnotě?
2. Najděte nějaký útvar s konečným obsahem, do kterého se vložka určitě vejde. Spočítejte jeho obsah, pokud strana původního čtverce má délku 1.



Obrázek 1: Počáteční kroky upravené Kochovy vločky.

3. Určete Hausdorffovu a topologickou dimenzi naší vločky. Jedná se o fraktál?



Výfučtení: Fraktály

Úvod

Fraktály jsou speciální geometrické útvary, které mají velké množství pozoruhodných vlastností a překvapivě velmi široké uplatnění v přírodě i technice. Na přesné definici fraktálů dodnes nepadá v matematické komunitě shoda, proto se zde omezíme na základní přehled vlastností, které u daného objektu naznačují, že by mohlo jít o fraktál.

V první řadě se fraktály vyznačují tím, že mají velmi velkou členitost, a to dokonce tak velkou, že jejich obvod (v případě plošných fraktálů), resp. povrch (v případě prostorových fraktálů) roste nade všechny meze, avšak přitom ohraničují zpravidla konečnou plochu, resp. objem. Můžeme si to představit například pomocí mapy nějakého ostrova nebo kontinentu. Pokud budeme mít mapu velkého měřítka a budeme chtít měřit délku pobřeží, naměříme určitou hodnotu. Když si však vezmeme detailnější mapu a budeme opět měřit délku pobřeží, dostaneme výrazně vyšší číslo, protože můžeme započítat i menší nepravidelnosti. Kdybychom pak kolem pobřeží šli např. s GPS lokátorem, byla by námi ураžená trasa ještě mnohem větší. Pokud však budeme měřit rozlohu ostrova, bude se naše informace se změnou měřítka zpřesňovat, ale hodnota nijak dramaticky růst nebude.

Další důležitou vlastností fraktálů je *soběpodobnost*. To znamená, že když si část křivky přiblížíme, bude vypadat stejně nebo velmi podobně jako celek, a to při libovolném počtu přiblížení.

Poslední vlastností, kterou zde uvedeme, je fakt, že přestože tvary fraktálů bývají velmi složité, k popisu jejich konstrukce stačí často velmi málo instrukcí, které se poté donekonečna opakují.

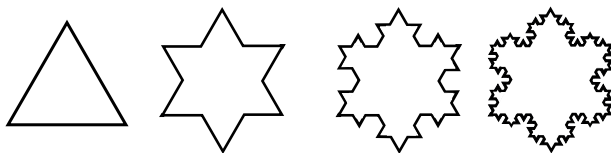
Ačkoliv mají fraktály pozoruhodné vlastnosti a široké uplatnění i v přírodě, jedná se o novou oblast matematiky, která se začala rozvíjet až ve 20. století.

Známé fraktály

Pro lepší představu, jak vlastně takové fraktály vypadají a jak se konstruují, si zde uvedeme několik nejznámějších příkladů v rovině.

Kochova vločka

Nejčastěji uváděným a taktéž na popis nejjednodušším fraktálem je takzvaná *Kochova vločka*. Ta vzniká z rovnostranného trojúhelníku, který je tedy prvním krokem jejího sestavení. V druhém kroku každou jeho stranu rozdělíme na třetiny a v prostředních třetinách nakreslíme nové rovnostranné trojúhelníky, čímž dostaneme šesticípou hvězdu. V dalším kroku každou z úseček útvaru opět rozdělíme na třetiny a prostřední třetinu nahradíme rovnostranným trojúhelníkem. Tento postup stále opakujeme, až po nekonečném počtu opakování, neboli *iterací*, dostaneme fraktál zvaný Kochova vločka. Postupný vývoj Kochovy vločky můžeme vidět na obrázku 2.



Obrázek 2: Některé první iterace Kochovy vločky

Jak dokážeme, že je Kochova vločka opravdu fraktál? Jelikož základ je rovnostranný trojúhelník a ostatní přidané trojúhelníky jsou vždy menší, můžeme si snadno uvědomit, že celá vločka zůstane uvnitř kružnice opsané původnímu trojúhelníku, tedy má určité konečný obsah. Délku křivky vyjádříme po jednotlivých krocích a ukážeme si, že se stále rychleji zvětšuje a roste nade všechny meze. Všechny tři strany trojúhelníku jsou stejné, tedy bude stačit, když budeme počítat pouze s jednou, o které řekneme, že na počátku měla délku 1. Po prvním kroku nahradíme prostřední třetinu rovnostranným trojúhelníkem, strana tedy bude mít délku $4/3$. Po druhém kroku, kdy trojúhelník přidáme do každé ze čtyř úseček, se každá z nich prodlouží na $4/3$ své délky, délka strany bude $(4/3)^2$. Když budeme pokračovat třetím krokem, bude délka $(4/3)^3$ a obecně po n krocích bude $(4/3)^n$. Tento výraz vskutku roste nade všechny meze. Pokud by totiž někdo tvrdil, že existuje nějaká délka l , která je větší než délka strany Kochovy vločky, tak bychom určitě našli n , kde $(4/3)^n > l$. To můžeme provést pro každé l , tedy délka skutečně roste nade všechny meze.

Sierpińského kobereček

Sierpińského kobereček vzniká z čtverce, který v každém kroku rozdělíme na devět menších čtverečků a prostřední čtvereček vyjme. Po nekonečném opakování dostáváme fraktální obrazec jako na obrázku 3.

Podobným způsobem lze rovněž zkonstruovat tzv. Sierpińského trojúhelník, kdy rovnostranný trojúhelník rozdělíme na čtyři a prostřední vyjme. U čtvercového koberečku i trojúhelníku se můžeme rovněž snadno přesvědčit, že mají konečný obsah (vždy menší než obsah původního útvaru), ale jejich obvod roste nade všechny meze.



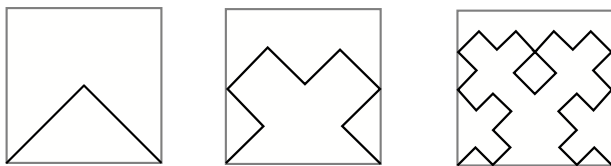
Obrázek 3: Několik prvních iterací Sierpiňského koberečku

Cantorovo diskontinuum

Cantorovo diskontinuum¹, nebo též Cantorova množina, je příkladem fraktálního útvaru na úsečce. Zkonstruujeme ho tak, že úsečku rozdělíme na třetiny a prostřední třetinu vyjmeme a toto opakujeme pořád dokola. Výsledkem je množina spojená z nekonečně mnoha izolovaných bodů.² Zároveň ale budeme-li chtít spočítat délku Cantorovy množiny pomocí sečtení délek vyjmutých úseček, dostaneme překvapivý výsledek: vyjmuli jsme celou úsečku. Délka Cantorovy množiny je tedy nula.

Hilbertova křivka

Hilbertova křivka je jednou z nejpodivnějších křivek – ačkoliv je to křivka, pokrývá celou rovinu. K její konstrukci vezmeme čtverec, ve kterém bude nakreslená čára ve tvaru písmene V spojující dva sousední rohy. V každém kroku pak čtverec rozdělíme na čtyři menší čtverečky a křivku změním tak, aby v každém z nich byla písmenem „V“ spojujícím dva sousední rohy. Postup konstrukce je ilustrován na obrázku 4.



Obrázek 4: Několik prvních iterací Hilbertovy křivky

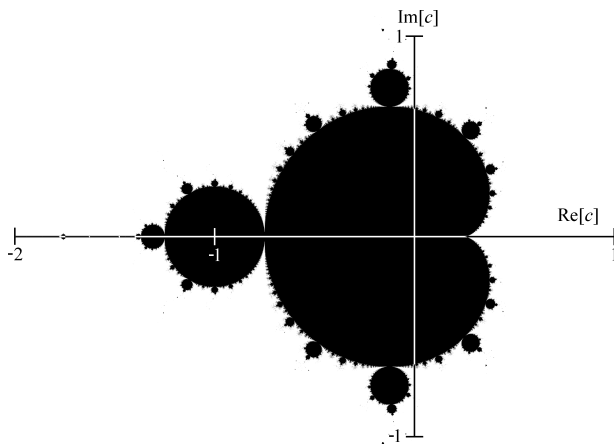
Když takto budeme pokračovat dál a dál, bude se křivka ve čtverci zahušťovat, až nakonec pokryje celý jeho obsah, tedy bude procházet každým bodem čtverce. Povedlo se nám tedy z jednorozměrné křivky vytvořit dvojrozměrný čtverec!

Mandelbrotova množina

Poslední fraktál, který zde zmíníme, je velmi známá takzvaná Mandelbrotova množina. U její konstrukce nejde o opakování geometrické operace, nýbrž operace aritmetické, a to postupné umocňování a přičítání čísel. Nejedná se však o obyčejná reálná čísla, ale o takzvaná čísla *komplexní*. Tato čísla mají dvě složky (odtud komplexní), a tedy se místo číselné osy dají znázornit na celou rovinu. Skupina čísel s určitou vlastností tak může vytvořit 2D fraktální útvar. Úplné osvětlení komplexních čísel je bohužel nad rámec tohoto textu. Jak tato množina vypadá, můžete zjistit na obrázku č. 5.

¹Diskontinuita znamená nespojitost, neboli jednoduše řečeno: mezi každými dvěma body je mezera.

²Dokonce nespočetně mnoho, tedy kdybychom si je chtěli očíslovat přirozenými čísly, tak se nám to nepodaří.



Obrázek 5: Mandelbrotova množina

Fraktální dimenze

Pro fraktály zavedl matematik Felix Hausdorff speciální *fraktální dimenzi*, která na rozdíl od klasické prostorové dimenze, kterou někdy matematici nazývají *topologickou dimenzí*, nemusí být celočíselná. Nyní se na rozdíl těchto dvou definic podíváme podrobněji.

Topologická dimenze útvaru nám říká, kolik údajů potřebujeme k určení konkrétního bodu na daném útvaru. Když máme bod na úsečce, stačí nám k jeho určení jedna hodnota, například vzdálenost od zvoleného počátku. Topologická dimenze úsečky je tedy 1. Když vezmeme čtverec, potřebujeme k popisu každého bodu dvě čísla, například jeho souřadnice x a y nebo jeho vzdálenost od počátku a úhel od osy x . Čtverec má tedy topologickou dimenzi 2. Pro bod na krychli pak již musíme použít k popisu čísla tři, topologická dimenze krychle je tedy 3. Můžeme si snadno rozmyslet, že topologická dimenze bude vždy celočíselná (nemůžeme potřebovat půlku čísla).

Fraktální dimenze naproti tomu porovnává, kolikrát se zvětší velikost útvaru při daném zvětšení základní jednotky. Konkrétně pro zvětšení základního rozměru k krát se útvar zvětší N krát (původní útvar se do nového vejde N krát) a pro fraktální dimenzi d platí³

$$N = k^d.$$

Tato chytrá definice umožňuje, že pro nám známé útvary, např. úsečku, čtverec a krychli (mimo fraktálů), platí, že se jejich topologická dimenze rovná té fraktální a je i hezky celočíselná.

Vyzkoušejme si uvedenou definici u nejjednodušších útvarů, což fraktály nejsou, a tudíž budou mít celočíselnou dimenzi. Příklad zvětšování úsečky je triviální: když úsečku zvětšíme (prodloužíme) dvakrát, ta původní se do nové vejde rovněž dvakrát. To znamená, že pro úsečku platí $d = 1$, aby $N = k$. To také odpovídá tomu, co o úsečce říkáme topologicky, tj. že jde

³Tedy (jak se to občas v matematice dělá) d zde nepřímou definujeme, jako „tu veličinu, která splňuje danou rovnici,“ namísto abychom řekli přímou definicí ve tvaru: „ d je taková, veličina, která se rovná...“ I přesto, že druhý způsob technicky možný je, v tomto případě se nám více hodí nový pojem zavést takto. Při pozdějším studiu matematiky narazíte na tento přístup k definicím často.

o „jednorozměrný“ útvar (jediným číslem, např. vzdáleností od počátku, můžeme určit polohu na ní). Naproti tomu pokud u čtverce zvětšíme základní jednotku (stranu) dvakrát, zvětší se celý čtverec co do obsahu čtyřikrát. Pro jeho dimenzi tedy bude platit $4 = 2^d$ a fraktální dimenze čtverce je $d = 2$. Obdobně když stranu krychle zvětšíme dvakrát, zvětší se jeho objem osmkrát, tedy pro dimenzi platí $8 = 2^d$, z čehož dostáváme fraktální dimenzi krychle $d = 3$.

Zkuste sami přijít na to, že obě definice dimenze dávají stejné výsledky i v případě obdélníků, trojúhelníků, nebo třeba i kruhů (nejen kružnic!). U fraktálů ale, jak si později ukážeme, se fraktální dimenze té topologické rovnat nemusí, čímž získáme nový způsob, jak právě fraktály porovnávat.

Matematická odbočka – exponenciály a logaritmy

Abychom mohli snadno počítat dimenze fraktálů, bude dobré si zavést několik nových matematických pojmů, díky kterým můžeme porozumět postupu nalézání d pro libovolné N a k .

Obecně zapsaný výraz a^x zde pro celočíselná x znamená, že a vynásobíme x krát mezi sebou. Nemusíme se však omezovat jen na celá x , pokud je x racionální (tedy zlomek), můžeme a^x vyjádřit pomocí mocnin a odmocnin. Konkrétně pro $x = p/q$ dostaneme

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

K rozšíření na libovolná reálná čísla pak využijeme *exponenciální funkci*, kdy výraz a^x nazýváme exponenciálou se základem a . Inverzní funkce k exponenciále se nazývá logaritmus, který můžeme definovat vztahem

$$a^x = b \quad \Rightarrow \quad x = \log_a b,$$

kde $\log_a b$ nazýváme logaritmem z b se základem a . Protože pro výpočet logaritmu s libovolným základem nemáme na kalkulačce tlačítko, používáme k jeho výpočtu vztah

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}.$$

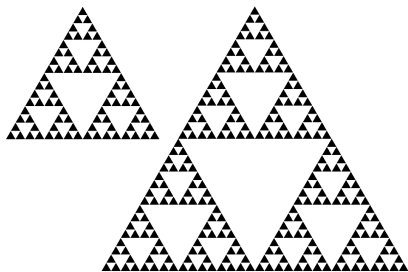
Více se o exponenciálách a logaritmech můžete dozvědět například ve Výfučení ze třetího ročníku⁴.

Výpočet dimenze některých fraktálů

Předtím než vypočteme fraktální dimenzi jakéhokoli fraktálu, si musíme uvědomit, že v některých případech mluvíme o útvech tvořených např. nekonečně dlouhými lomenými čarami (třeba Kochova vložka, či Hilbertova křivka výše). Není jednoduché půlit či dělit nekonečna, a proto si musíme lépe ukázat, co vlastně znamená „zvětšení fraktálu“, abychom i v tomto případě rozuměli písmenu N v definici fraktální dimenze.

O fraktálu říkáme, že se N krát zvětší při $knásobném$ zvětšení základního rozměru, pokud můžeme nějaký útvar (libovolně zvolený úsek fraktálu v jeho konečné podobě) nalézt N krát v něm *samém* po zvětšení. Ukažme si to na příkladu Sierpiňského trojúhelníku na obrázku 6. Ať už jej chápeme jako jednorozměrnou lomenou čáru, či jako plošný obrazec s velkým obvodem, stále platí, že při dvojnásobném zvětšení jeho základního rozměru (např. strany největšího trojúhelníku) obrazec není zdvojnásoben, nýbrž *trojnásoben*. Je vidět, že původní fraktál se ve zvětšeném nachází třikrát. Veličina N je pak rovna 3, zatímco $k = 2$.

⁴https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r3/vyfucteni/vyfucteni_5.pdf



Obrázek 6: Sierpiňského trojúhelník a jeho dvojnásobné zvětšení

Podívejme se na Kochovu vložku a opět studujme jen jednu stranu. Když stranu zvětšíme třikrát ($k = 3$), tak se se zvětší délka strany čtyřikrát. Zvětšená strana se totiž skládá ze čtyř segmentů, které jsou kopie předchozí, nezvětšené strany. Tedy máme $N = 4$. Pro dimenzi tedy platí:

$$4 = 3^d \Rightarrow d = \log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3} \doteq 1,26.$$

Kochova vložka má tedy neceločíselnou Hausdorffovu dimenzi.

Navíc při posuzování zvětšení fraktálů je důležité nezapomenout na fakt, že uvedené neplatí pro dílčí kroky, které k fraktálu vedou! Podívejme se proto zpět například na obrázek 2. Je sice pravda, že v prvním kroku Kochovy vložky se základní úsečka útvaru v jedné straně hvězdy vyskytuje čtyřikrát, i když strana je třikrát větší, avšak nemůžeme tvrdit, že při zvětšení této hvězdy třikrát by se délka čáry zvětšila *čtyřikrát*. Už jsme si ukázali, že pro základní obrazce (a zmíněná hvězda je právě složena pouze z konečného množství částí trojúhelníků) je Hausdorffova dimenze 1, a tedy při trojnásobném zvětšení se délka čáry rovněž *jen ztrojnásobí*.

Vraťme se k dalším příkladům fraktálů. Sierpiňského koberec se při zvětšení základního rozměru třikrát zvětší osmkrát (zvětšený koberec pojme 8 původních), a pro jeho dimenzi tedy dostáváme

$$8 = 3^d \Rightarrow d = \log_3 8 = \frac{\log 8}{\log 3} \doteq 1,89.$$

Mohlo by se tak zdát, že fraktál poznáme tím, že jeho Hausdorffova dimenze je neceločíselná. To však nemusí být pravda, jak se přesvědčíme u Hilbertovy křivky. Když totiž u ní zvětšíme délku strany čtverce dvakrát, zvětší se délka křivky čtyřikrát (opět: délka sice není konečná, ale lze vidět, že křivku tvoří čtyři shodné menší, jí podobné), tedy pro dimenzi platí:

$$4 = 2^d \Rightarrow d = \log_2 4 = \frac{\log 4}{\log 2} = 2.$$

Hilbertova křivka má tedy Hausdorffovu dimenzi celočíselnou a rovnou dvěma, ačkoliv její topologická dimenze je určitě jedna. Tím se dostáváme k další možné definici fraktálů, a to že *fraktály jsou takové útvary, které mají Hausdorffovu dimenzi ostře větší⁵ než topologickou*.

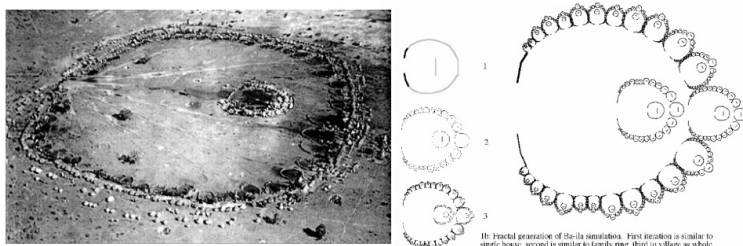
⁵V matematice slovem „ostře“ obvykle zdůrazňujeme fakt, že jedna veličina má hodnotu větší než jiná, ale nikdy ne rovnou, tedy že jediný vhodný symbol pro tuto relaci je $>$ a nikoli $\geq$.

Fraktály v kultuře

Již jsme zmínili, že až v 19. a 20. století se lidé poprvé zabývali odborným studiem fraktálů. Předměty s fraktální strukturou se však v naší kultuře objevovaly mnohem dříve. Už středověké obrazce, pocházející nejčastěji z islámské kultury, vykazovaly jisté známky soběpodobnosti. Dále hrály fraktály významnou roli v africké architektuře.

Na obrázku 7 můžeme vidět vesnici Ba-ila v Zambii. Každý dům v této vesnici má tvar prstence s posvátným oltářem uprostřed. Domy v rámci jedné rodiny jsou opět uspořádány do prstence a tyto rodinné prstence jsou všechny seřazeny do velkého prstence tvořícího celou vesnici tak, že větší rodiny jsou umístěny blíže ke středu. Uprostřed vesnice se nachází největší prstenec, prstenec domů náčelníkovy rodiny. Ten leží na stejném místě jako oltář v samostatných domech, celá vesnice potom z dálky vypadá stejně jako jednotlivé domy. Vykazuje tedy, stejně jako fraktály, nezávislost na měřítku.

Africká architektura není jediná, která využila fraktálů. Mnoho velkých měst bylo navrženo podle následujícího vzorce: celé město bylo rozděleno do čtverců, přičemž na hranách těchto čtverců se nacházely ty největší pozemní komunikace. Tyto čtverce byly dále rozděleny do menších čtverců opět s menšími komunikacemi a takto dělení pokračovalo až do bloků jednotlivých domů ohraničených obytnými zónami.



Obrázek 7: Vesnička Ba-ila a její fraktální model, Autor: African Fractals, licence: Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International
(https://en.wikipedia.org/wiki/File:Ba-ila_Village.jpg)

Fraktály v přírodě

Kromě lidí si i příroda všimla, že fraktální struktura je často velmi výhodná. Pokud jste se například někdy z dálky podívali na list kapradiny, tak jste si všimli, že je složen z menších uspořádaných listů. Při pohledu zblízka jsou i tyto menší listy složeny ze stejně uspořádaných ještě menších lístků. List kapradiny je tedy v podstatě složen z menších listů kapradiny.

Kapradina samozřejmě není jediná rostlina vykazující známky soběpodobnosti. Kmeny stromů se rozdělují na větve a každá větev se poté dále dělí na menší větve, které vypadají podobně jako větší větve a nebo občas i jako celý kmen. Dále všichni známe brokolici, která se větví do menších brokolic, ale asi nejzajímavější ze všech je druh kvěťáku nazývaný *romanesco*, který můžete vidět na obrázku 8.



Obrázek 8: Romanesco je zelenina podobná kvěťáku a brokolici se zřetelnou fraktální strukturou. Autor: Ivar Leidus, licence: Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International ([https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Romanesco_broccoli_\(Brassica_oleracea\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Romanesco_broccoli_(Brassica_oleracea).jpg))

Fraktály ve fyzice

S jevy vykazujícími fraktální charakteristiky se i ve fyzice můžeme setkat poměrně často, ty nejznámější si stručně popíšeme v následujících kapitolách. Ještě před tím by ale bylo vhodné zmínit, k čemu nám je tato informace dobrá. Jde o to, že když chceme studovat vlastnosti nějakého reálného systému, tak jsou ve většině případů výpočty příliš komplikované na to, abychom je mohli provést tužkou na papíře. Proto se takovéto systémy modelují pomocí počítačových simulací, které však také mohou být velmi komplikované. Když se tedy podaří zjistit, že nějaký jev vykazuje fraktální strukturu, můžeme pro jeho modelování využít fraktální geometrii, což je výhodné, neboť, jak jsme již řekli, i přes jejich komplikovanou strukturu lze fraktály často popsat pomocí jednoduchých rovnic.

Fázové přechody

Příkladem fyzikálních jevů, při kterých se můžeme setkat s fraktální strukturou látky, jsou takzvané *fázové přechody*. Pojem fázový přechod v termodynamice označuje změnu makroskopických vlastností nějakého systému. Dobrým příkladem fázového přechodu je například změna skupenství. Víme, že látka je složená z atomů nebo molekul, které se neustále chaoticky pohybují, energie tohoto pohybu pak určuje termodynamickou teplotu látky. Při nižších rychlostech jsou částice navzájem drženy pohromadě v důsledku vzájemných vazeb a pohyb částic spočívá buď v kmitání kolem jejich rovnovážné polohy (pevné látky) nebo i v pohybu vzájemných rovnovážných poloh (kapaliny). Při ještě vyšších rychlostech se částice od sebe vzdálí dost daleko na to, aby unikly působení přitažlivých sil a interagují spolu pouze prostřednictvím srážek (plyny). Je důležité si uvědomit, že se všechny částice rozhodně nepohybují stejnou rychlostí. Kdybychom se zaměřili na jednu konkrétní molekulu, tak nemůžeme předpovědět, jakou bude mít rychlost. Víme jen to, kolik molekul se pohybuje přibližně nějakou konkrétní rychlostí. Proto když se teplota látky blíží k bodu, kdy dochází ke změně skupenství, například z pevného na kapalné, jen část částic se pohybuje dost rychle na to, aby se uvolnila ze svojí pevné polohy a stala se kapalinou. Celá látka se potom rozdělí na oblasti v pevném a kapalném skupen-

ství a tyto oblasti vykazují fraktální strukturu. Při přeměně v opačném směru ze skupenství kapalného na pevné toto můžeme dobře pozorovat například u sněhových vloček.

Další fázový přechod, který zde zmíníme, je z oblasti magnetismu. Látky můžeme z hlediska jejich chování ve vnějším magnetickém poli rozdělit do tří základních skupin: *diamagnetické*, *paramagnetické* a *feromagnetické*. Původ jejich odlišného chování musíme hledat na molekulární úrovni, neboť částice paramagnetik a feromagnetik se na rozdíl od diamagnetik chovají jako malé magnety. Ty jsou buď zcela náhodně orientovány (paramagnetika) nebo díky krystalické struktuře látky vznikají větší shluky stejně orientovaných částic, tzv. *domény*, které jsou vůči sobě opět náhodně orientovány, proto se v obou případech výsledné magnetické pole vyruší. Poté co však takovouto látku vložíme do vnějšího magnetického pole, elementární magnety se přeorientují do stejného směru a kolem látky se vytvoří nové magnetické pole, které je u feromagnetik zpravidla silnější.

Při zahřátí feromagnetika na určitou teplotu, tzv. *Curieův bod*, dojde k porušení krystalické mřížky a z feromagnetické látky se postupně stane paramagnetická. Tento fázový přechod podobně jako změna skupenství nenastává okamžitě a při Curieově teplotě mají domény opět fraktální strukturu.

Difuze a blesky

Difuze je zjednodušeně řečeno jev, při kterém částice jedné látky v důsledku svého chaotického pohybu postupně přemísťují z oblastí s vyšší koncentrací do oblastí s nižší koncentrací, například při promíchávání dvou látek. Blesky asi všichni známe. Tyto dva jevy mají společnou jednu vlastnost, oba jdou dobře modelovat pomocí takzvaných *větévkatých fraktálů*. Vznik větévkatého fraktálu si můžeme popsat např. na blesku. Elektrický výboj se totiž z mraku k zemi pohybuje po přibližně 50metrových krocích. Po každém kroku se může změnit jeho směr, nebo se i rozdělit na více větví. Tento postup se mnohokrát opakuje a výsledkem je rozvětvená struktura blesku, přičemž jednotlivé větve jsou často soběpodobné.

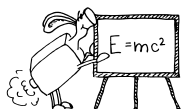
Difuzi si můžeme představit podobným způsobem. Jednotlivé částice se vždy pohybují nějakým směrem a po určité době dojde ke srážce s jinými částicemi, což způsobí vychýlení z původního směru. Pohyb částic potom opět získá větévkovou strukturu.

Závěr

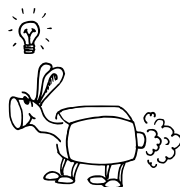
Jak jste si mohli všimnout, fraktály jsou skutečně velké a všeprostupující téma. Doufáme, že vás neodradí poněkud vyšší matematická náročnost jejich zkoumání a podobně jako my nepřestanete žasnout nad širokou škálou jejich výskytu a překvapivou „matematicností“ přírody. Až příště půjdete do lesa, zkuste najít co nejvíce přírodních fraktálů.

Jiří Kohl
jirkak@vyfuk.org

Kateřina Rosická
kackar@vyfuk.org



Řešení III. série



Úloha III.1 ... Vánoční dláždění

5 bodů; průměr 3,38; řešilo 8 studentů

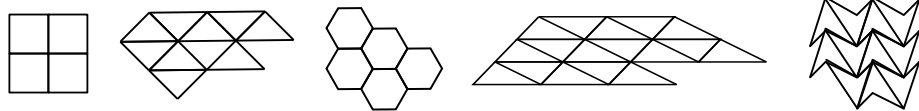
Eva pekla vánoční cukroví a jednu várku kompletně spálila, Aleš ji ale uklidnil, že to ještě není nejhorší. Třeba Pat a Mat – ti když pekli, bylo to tak tvrdé, že si z toho vydláždili chodník. Eva se zeptala, jestli by se z jejích lineckých komet dal dláždít nekonečný prostor. Aleš jí odpověděl, že ne, a oba začali přemýšlet, jaké jiné cukroví by Eva měla upéct, aby se jí to podařilo.

Dokažte, že se nekonečná plocha dláždít dá, a vymyslete alespoň 5 různých tvarů, kterými to lze (jako bonus můžete vymyslet nějaký typický tvar vánočního cukroví).



Vyplněním nekonečné plochy neboli *teselací* se zabýval již slavný matematik a astronom Johannes Kepler. Ten ve své knize *Harmonices mundi* ukázal, že z pravidelných mnohoúhelníků jde rovinu pokrýt pouze třemi, a to rovnostranným trojúhelníkem, čtvercem a pravidelným šestiúhelníkem. Abychom mohli dláždít nekonečnou plochu, musí být součet vnitřních úhlů útvarů stýkajících se v jednom bodě 360° , tedy plný úhel. Jelikož pravidelné mnohoúhelníky mají všechny vnitřní úhly stejné a jasně dané typem mnohoúhelníku, musí pro hledaný útvar platit, že 360° je celočíselným násobkem vnitřního úhlu. Ten je pro trojúhelník 60° , pro čtverec 90° a pro šestiúhelník 120° , tedy po řadě šestina, čtvrtina a třetina plného úhlu. Můžete si rozmyslet, že žádným z jiných pravidelných mnohoúhelníků již nemůžeme rovinu pokrýt, protože všechny musí mít velikost vnitřních úhlů menší než 180° .

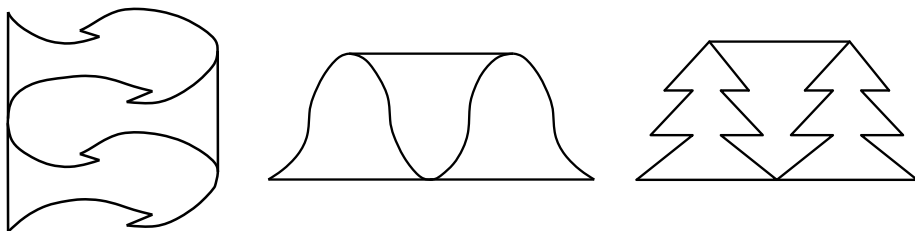
Podívejme se však i na nepravidelné útvary. Z těch se dá rovina pokrýt libovolným obecným trojúhelníkem, libovolným (i tzv. nekonvexním) čtyřúhelníkem a některými speciálními typy pětiúhelníků a šestiúhelníků. Dláždění všemi pravidelnými a dvěma nepravidelnými mnohoúhelníky můžete vidět na obrázku 9.



Obrázek 9: Nekonečné řady nepravidelných tvarů

My jsme se ptali na tvar vánočního cukroví, pochybujeme však, že Eva pekla cukroví ve tvaru šestiúhelníků. Útvary, kterými jde vydláždít rovina, je totiž více, jen se již nemusí jednat o zmíněné mnohoúhelníky. Jiný obrazec vyplňující rovinu můžeme vytvořit tak, že z jedné strany čtverce nebo šestiúhelníku vystříháme útvar a ten nalepíme na protější stranu nebo na sousední stranu otáčením do jednoho směru. Z tvarů typických pro vánoční cukroví tak můžou rovinu vyplnit například stromečky, zvonky nebo ryby (obr. 10).

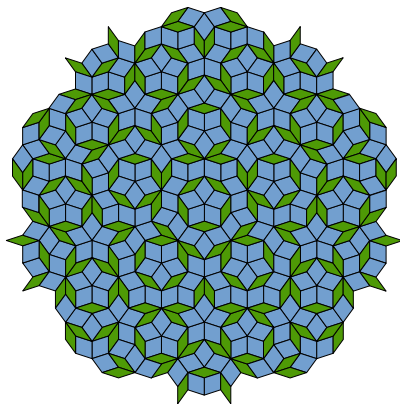
Vyplňování roviny různými útvary není pouze záležitostí matematiky, ale setkáváme se s ním v mnoha různých oborech. Již od starověku se zdobí stěny chrámů barevné mozaiky a tato výtvarná technika nezůstává pozadu ani ve dvacátém století u M. C. Eschera. Dále vyplňování



Obrázek 10: Nekonečné řady vánočního cukroví

roviny nalezneme v přírodě například u včelích pláství, které mají šestiúhelníkový tvar, u vyplnění tkáně buňkami či u sloupů čedičových skal (tzv. varhany, v České republice např. Panská skála u České Skalice). Tvary vyplňující rovinu mají rovněž využití v krystalografii, třeba u kubické krystalové mřížky s rovinami tvořenými čtverci nebo například u grafitu, jehož roviny jsou tvořeny šestiúhelníky.

I přes svou zdánlivou jednoduchost není problém dláždění roviny zcela vyřešen. Problémem dláždění omezeným množstvím tvarů, které není periodické (přesunutím jedné části nikdy nedostaneme shodu s jinou), ale vykazuje jisté náznaky symetrie, se zabýval i Roger Penrose⁶. Nejjednodušší Penroseovo dláždění je složeno ze dvou kosočtverců. Pevné látky, které vykazují takovéto uspořádání, byly v roce 1982 skutečně objeveny a nazýváme je kvazikrystaly.



Obrázek 11: Jeden z mnoha typů Penroseova dláždění.

Kateřina Rosická
kackar@vyfuk.org

Úloha III.2 ... Countryballs

5 bodů; průměr 3,97; řešilo 36 studentů

⁶nositel Nobelovy ceny za fyziku 2020 za výzkum černých děr

Podíváte-li se na mapu Evropy s hlavními městy (třeba zde⁷), možná vás zarazí, že ve většině případů nejsou hlavní města ve vnitrozemí, ale u hranice. I když vyloučíme přímořské státy (u nichž je pravděpodobné, že je hlavní město přístav), tento trend je zřejmý. Ale proč? Nebylo by pro administrativu výhodnější, kdyby hlavní město bylo ve středu země, aby ke každému místu mělo co nejlíže?



Obrázek 12: Mapa Evropy

Podíváme se na jedno možné matematické vysvětlení tohoto fenoménu: náhodu. Představme si nějaký vzorový stát, který má pro zjednodušení tvar kruhu. Když bychom na mapu tohoto státu chtěli umístit hlavní město, přičemž všechna místa by měla stejnou pravděpodobnost, s jakou pravděpodobností bychom jej umístili do vnitřku – kruhu o poloměru r ?

Kdo správně počítá, vidí, že zdaleka nevyšla pravděpodobnost 50 %. Jaký by musel být vnitřní poloměr vyjádřený jako násobek poloměru r , aby šance na umístění do vnitřního půlkruhu byla stejná jako šance na umístění ven?

S pojmem pravděpodobnost jste se již určitě setkali v každodenním životě. Ve zprávách například slyšíme, že je velice pravděpodobné, že bude pršet nebo že daný kandidát na prezidenta se 100% pravděpodobností vyhraje. V matematice používáme slovní spojení pravděpodobnost jevu (v našem případě náhodného) a tuto číselnou hodnotu označujeme jako P . Pravděpodobnost P může nabývat hodnot mezi 0 a 1 – pokud je pravděpodobnost nulová, znamená to, že jev určitě nenastane, pokud je pravděpodobnost 1, znamená to, že si můžeme být jisti, že daný jev nastane. Kdybychom měli například hrací kostku, na které jsou jen samé šestky, a hodili s ní, je pravděpodobnost, že nám padne šestka, 1 a pravděpodobnost, že nám padne třeba pětka, 0.

⁷https://europa.eu/european-union/sites/europaeu/files/easy_to_read/european-map_en.jpg

V souvislosti s pojmem pravděpodobnost se můžeme setkat také s procenty. To když vztahujeme pravděpodobnost ke 100%, což je naše 1. Pokud se tak něco stane s pravděpodobností $P = 0,5$, znamená to 50%, $P = 0,02$ znamená 2% apod.

Ale jak vlastně pravděpodobnost vypočítáme? Pokud nás zajímá náhodný jev (což v našem příkladu umístování města do kruhu je), potom pravděpodobnost spočítáme jako poměr příznivých událostí ku celkovému počtu možných událostí. V našem případě jsou všechny možné události body celé země, tedy kruhu. Všechny body vytvoří plochu tohoto kruhu, jehož obsah spočítáme jako $S_1 = \pi r^2$, kde π je známé Ludolfovo číslo a r je poloměr kruhu. Příznivé události jsou v našem příkladu body kruhu o polovičním poloměru než ten předchozí. Jeho obsah tak spočítáme jako $S_2 = \pi (r/2)^2$.

Pravděpodobnost, že se město bude nacházet ve vnitřním kruhu, tak spočítáme jako poměr počtu příznivých událostí ku celkovému počtu událostí, tedy

$$P = \frac{\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

To znamená 25 %.

Aby byla stejná šance na umístění do vnitřního kruhu jako na umístění ven z něj, musí být pravděpodobnost, že město bude ve vnitřním kruhu, 50%, tedy $P = 0,5$. Snažíme se zjistit, jaký zlomek poloměru to bude, proto výsledný poloměr vnitřního kruhu označíme zlomkem r/x . Zjistíme tak, že

$$\frac{\pi \left(\frac{r}{x}\right)^2}{\pi r^2} = 0,5,$$

z čehož po úpravách dostaneme tvar

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

A z toho již jednoduše dopočítáme, že $x^2 = 2$, a tedy že $x = \sqrt{2}$. Aby byla pravděpodobnost vnitřního i vnějšího kruhu stejná, musel by být poloměr vnitřního kruhu $r_v = r/\sqrt{2} \doteq 0,7r$.

Karolína Letochová
kaja@vyfuk.org

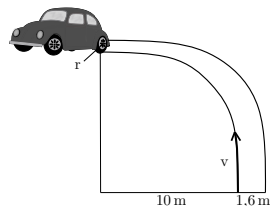
Úloha III.3 ... Diferenciální počet

6 bodů; průměr 5,23; řešilo 39 studentů

Lidové přísloví říká, že čert se skrývá v maličkostech, a obzvláště mnoho se jich nachází u konstrukce auta. Jako nadějní mladí inženýři byste mohli sestavit účinný motor, připevnit jej na kola spojená tyčí a vyrazit na cestu. Nicméně v nejbližší zatáčce byste zažili první překvapení. Vzhledem k tomu, že vaše auto má nezanedbatelnou šířku, by se kola v zatáčce otáčela s rozdílnými rychlostmi, což by autu nesvědčilo.

Ke skutečným autům je připojena součástka s názvem diferenciál, jejímž úkolem je řešit rozdílné rychlosti otáčení kol, pojďme se však podívat, jak markantní tento rozdíl v reálné situaci je.

Představme si např. Škodu Favorit jedoucí do levotočivé zatáčky o vnitřním poloměru 10 m rychlostí $v = 30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Vzdálenost kol od sebe je cca 1,6 m



Obrázek 13: Průjezd auta zatáčkou

a jejich poloměr je $r = 34$ cm. Představte si pro zjednodušení, že obě přední kola cestují po soustředných kružnicích.

1. Je-li v rychlost levého kola, jakou frekvencí (tj. kolikrát za sekundu) se kolo otáčí kolem své osy?
2. Jakou frekvencí se otáčí kolem své osy pravé kolo a jaký je to rozdíl?

Počítejte s tím, že obě kola neprokluzují.

Naše řešení bude vycházet z úvahy, že perioda T , za kterou se levé kolo stihne otočit, je podílem jeho obvodu o a obvodové rychlosti v (stejná jako rychlost celého auta). Toto platí právě díky tomu, že kolo nepodkluzuje. Frekvenci f přímočaře vyjádříme z definice jako převrácenou hodnotu periody a obvod kola vypočítáme z poloměru r uvedeného v zadání. Nesmíme jej, stejně jako rychlost automobilu, zapomenout dosadit v základních jednotkách.

$$f_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{o}{v}} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{\frac{30}{3,6} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}{2\pi \cdot 0,34 \text{ m}} \doteq 3,9 \text{ Hz}$$

Všimněme si, že v druhé části úlohy můžeme použít ten samý vzorec, pouze do něj musíme dosadit jinou obvodovou rychlost v_2 . Kola konají dvojí rotační pohyb, kolem své osy a kolem osy otáčení celého automobilu. Nás bude tentokrát zajímat druhý zmíněný, neboť pro něj platí, že se obě kola otáčejí stejnou úhlovou rychlostí. Tu lze spočítat jako podíl obvodové rychlosti a poloměru části kružnice, kterou opisují. Označme si vnitřní poloměr zatáčky s a vzdálenost kol od sebe d . Potom platí následující rovnost:

$$\frac{v}{s} = \frac{v_2}{d + s}.$$

Z ní si vyjádříme rychlost v_2 .

$$v_2 = \frac{v(d + s)}{s}$$

Nakonec nám po jejím dosazení do původní rovnice vyjde frekvence f_2 :

$$f_2 = \frac{v_2}{2\pi r} = \frac{\frac{v(d+s)}{s}}{2\pi r} = \frac{v(d+s)}{2\pi rs} = \frac{\frac{30}{3,6} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} (1,6 \text{ m} + 10 \text{ m})}{2\pi \cdot 0,34 \text{ m} \cdot 10 \text{ m}} \doteq 4,5 \text{ Hz}.$$

Na první pohled vidíme, že se frekvence f_1 a f_2 výrazně liší. Vidíme, že jednoduše spojit obě kola pevnou tyčí by nefungovalo: rozdíl rychlostí by mohl snadno vést ke smyku a ke ztrátě přilnavosti k povrchu, a právě proto musí být součástí nápravy diferenciál, který jej dokáže odstranit.

Viktor Materna
materna@vyfuk.org

Úloha III.4 ... You spin me round...

6 bodů; průměr 4,27; řešilo 30 studentů

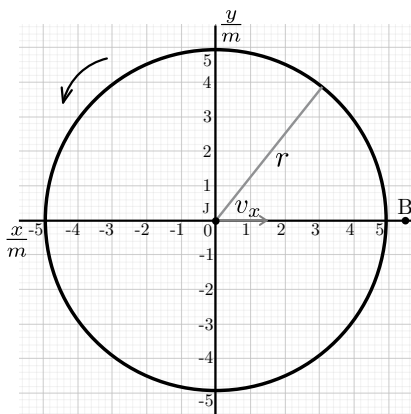
Jonatán si stoupl doprostřed kolotoče, což je disk s poloměrem $r = 5,0$ m, když v tom ho Barbora stojící mimo kolotoč roztočila konstantní frekvencí $f = 1,0$ Hz. Jonatán chtěl k Barboře přijít a napadly ho dvě možnosti, jak to udělat. Nejříve ho napadlo, že půjde prostě rovně.

1. Půjde-li rovnou za nosem (a zpočátku se dívá na Barboru), jakou musí jít rychlostí, aby nemusel na konci kolotoče čekat? Tj. aby přesně na konci své dráhy byl u Barbory? Pokuste se popsat všechny možné rychlosti.

Napadla ho ale ještě jiná možnost – půjde tak, aby Barboru pořád viděl před sebou. V takovém případě ale bude jeho rychlost poněkud komplikovaná a jistě se bude v čase měnit.

2. Zaveďte si souřadnicovou mřížku x a y (tzv. kartézské souřadnice), kde osa x bude procházet Barborou a Jonatánem na počátku. Tyto souřadnice by měly být „spojené se zemí“, tzn. že vůči nim se kolotoč bude otáčet. Vyjádřete rychlost Jonatána v těchto souřadnicích, aby při chůzi měl Barboru pořád před sebou. Tato rychlost bude záviset na čase a bude mít dvě složky (matematici by řekli, že se jedná o vektor rychlosti). Zároveň předpokládejte, že Jonatán dojde k Barboře za stejný čas jako nejmenší možný čas v předchozí úloze.

1. Abychom našli všechny možné rychlosti, musíme nejprve vědět, ve kterých polohách může vyskočit. Pokud Jonatán dojde na konec, když je kolotoč ve výchozí pozici, tak nebude muset čekat. To samé platí, pokud kolotoč otočíme o úhel 360° nebo o jakýkoliv jeho celočíselný násobek z (v číslech dostaneme otočení o $z \cdot 360^\circ$; $z \in \mathbb{Z}$).



Dalším krokem je určit, za jak dlouho musí Jonatán dojít na konec kolotoče. V této otázce nám pomůže frekvence otáčení. Frekvence v hertzech udává, kolikrát se objekt otočí kolem dokola za sekundu. Pokud tedy chceme zjistit, za jak dlouho se kolotoč otočil, tak počet otočení vydělíme frekvencí a dostaneme čas

$$t = \frac{z}{f}; z \in \mathbb{Z}.$$

Díky tomu, že Jonatán jde rovnoměrně přímočaře (ve své vztažné soustavě vůči kolotoči), můžeme využít vzorec pro rychlost $v = r/t$. V tomto vzorci odpovídá r poloměru, ale také je to Jonatánova dráha. Čas, za jaký se Jonatán musí dostat na konec, poté značíme t .

Všimněme si, že pro žádné otočení bychom dělili nulou, což není možné⁸. Pro záporný počet otočení je rychlost záporná. To totiž odpovídá tomu, že Jonatán stál nejprve na okraji a poté couval do středu. Toto se však nestalo, a proto ani to nemůže být řešení.

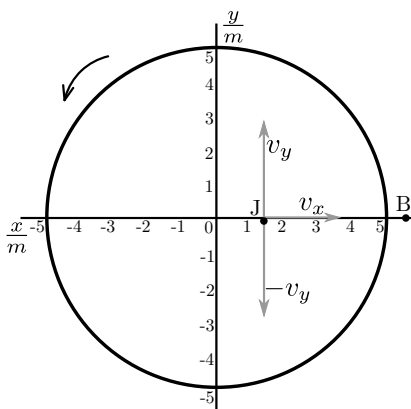
Jedinými řešeními tedy zůstávají přirozená čísla. Výsledek po dosazení bude

$$v = \frac{f \cdot r}{n}; n \in \mathbb{N},$$

$$v = \frac{1 \text{ Hz} \cdot 5 \text{ m}}{n}; n \in \mathbb{N}.$$

Příklady možných rychlostí Jonatána jsou $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, nebo $\frac{5}{3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Pro řešení úlohy využijeme tzv. princip superpozice, který je součástí Newtonových pohybových zákonů. Toto cize znějící slovo označuje fakt, že když zkoumáme pohyb Jonatána, jeho celkovou rychlost dostaneme jakou součet jednotlivých složek, které přispívají k jeho rychlosti. Také si jeho rychlost můžeme rozložit do složky ve směru x (směrem k Barboře) a do směru y (kolmo ke směru x).



Nejprve se podíváme na pohyb Jonatána, jakoby zde nebyl točící se kolotoč. V takovémto případě by se Jonatán pohyboval pouze ve směru osy x . V tomto směru se tedy pohybuje rychlostí $v_x = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jedná se o největší z rychlostí z minulého úkolu a vzhledem k tomu, že Jonatán ujde stejnou vzdálenost r , bude mu to trvat stejný čas jako v minulém způsobu.

Když ovšem opět vrátíme kolotoč, tak kromě tohoto pohybu bude ještě třeba vyrovnat rychlost, kterou předává Jonatánovi. Kolotoč mu udělí obvodovou rychlost, kterou se otáčí v daném místě. Udělená rychlost je ve směru y , předchozí rychlost je v kolmém směru x . Aby Jonatán rychlost vyrovnal, stačí se pohybovat opačnou rychlostí ve směru y . Jonatánovu obvodovou rychlost lze tedy vyjádřit jako

$$v_y = -\frac{2\pi l}{T} = -2\pi f$$

⁸Odpovídalo by to totiž stání na dvou místech zároveň nebo Jonatánově nekonečné rychlosti.

(mínus je z obráceného směru). V tomto vzorci značí l momentální vzdálenost od středu. Ta se mění pouze pohybem po ose x , kolotoč ji neovlivní. Na počátku v čase $t = 0$ byla tato vzdálenost rovna 0, postupně se zvětšovala, jak se Jonatán pohyboval po dráze rovnoměrného pohybu $s = v_x \cdot t$. Dostaneme tedy⁹

$$l(t) = v_x t.$$

Po dosazení do rovnice získáváme složku pohybu po ose y . Tím jsme tedy získali obě složky rychlosti. Tyto zapíšeme do podoby vektoru, jak se to obvykle ve fyzice dělá:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ -2\pi f t \cdot 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Vektorového zápisu se nemusíte obávat, jedná se jen o přehledný zápis rychlosti Jonatána ve dvou směrech. Shrňme si, co jsme vypočetli:

- Jonatán se pohybuje směrem k Barboře rychlostí $v_x = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Z pohledu Barbory se Jonatán ve směru y nepohybuje. To je proto, že rychlost kolotoče $-v_y$ vyrovnává tím, jak sám chodí rychlostí v_y , takže jeho celková rychlost je nulová.
- Rychlost, kterou Jonatán chodí do směru v_y se v čase mění a lze ji vyjádřit jako $v_y(t) = -2\pi f t \cdot 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Protože jsme nezadali směr, kterým Barbora kolotoč otáčí, je správné řešení i $-v_y$.

Pavel Provazník

pavelp@vyfuk.org

Úloha III.5 ... Židle s kolečky

7 bodů; průměr 4,72; řešilo 32 studentů

Robert o hmotnosti $m = 62 \text{ kg}$ má otočnou židli o hmotnosti $m_z = 8 \text{ kg}$ a rád na ní cestuje. Odráží se o stůl o hmotnosti $m_s = 35 \text{ kg}$ uprostřed pokoje. Jestliže se Robert odráží rychlostí $v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, odcestuje do vzdálenosti $s = 0,5 \text{ m}$.

- Jak velká brzdná síla na židli působí?
- Jakou rychlost má stůl těsně potom, co se od něj Robert odráží?
- Jak daleko docestuje stůl, pokud je brzdící síla stejná pro stůl i pro židli? A jak daleko, pokud je pro oba síla úměrná tlakové síle na podložku?



⁹Píšeme $l(t)$, neboť l je funkce času, tj. v čase se mění.

1. K nalezení brzdné síly použijeme druhý Newtonův zákon $F = (m + m_z)a$, který však vyžaduje znalost zrychlení. K jeho nalezení vyjdeme ze známého vzorce pro dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2,$$

kam za čas ze vzorce pro zrychlení dosadíme $t = \Delta v / a$, čímž dostaneme

$$s = \frac{v_0 \Delta v}{a} - \frac{\Delta v^2}{2a}.$$

Když si uvědomíme, že zpomalujeme až na nulovou rychlost, a tudíž platí $v_0 = \Delta v$, vzorec se nám zjednoduší do podoby, ze které již snadno vyjádříme zrychlení a .

$$s = \frac{v_0^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_0^2}{2s}$$

Stačí dosadit hodnoty ze zadání (v_0 je v našem případě počáteční rychlost $v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) a dostáváme zrychlení

$$a = \frac{(2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \cdot 0,5 \text{ m}} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Teď již známe všechny potřebné hodnoty, abychom dosadili do výše zmíněného Newtonova zákona. Nesmíme zapomenout dosadit celkovou hmotnost, tedy $m + m_z$. Pak dostáváme

$$F = (m + m_z)a = (62 \text{ kg} + 8 \text{ kg}) \cdot 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 280 \text{ N}.$$

Židli tedy brzdí síla o velikosti 280 N.

2. Při hledání rychlosti stolu těsně po odrazu u nám bude nápomocen zákon zachování hybnosti, který říká, že celková hybnost izolované soustavy (v našem případě soustava Robert, stůl, židle) je konstantní. Při aplikaci na tento konkrétní příklad tak vlastně říká, že celková hybnost po odrazu bude nulová, neboť před odrazem tomu bylo stejně. Když zohledníme i směry jednotlivých rychlostí v a u (jde totiž o vektorové veličiny), které jsou opačné, dostáváme rovnost

$$0 = p + p_z - p_s \quad \Rightarrow \quad p_s = p + p_z,$$

kde p , p_z a p_s jsou popořadě hybnosti Roberta, židle a stolu. Když hybnost přepíšeme jako součin hmotnosti a rychlosti, dostaneme vztah, ze kterého již rychlost u snadno vyjádříme.

$$m_s u = v(m + m_z) \quad \Rightarrow \quad u = v \frac{m + m_z}{m_s} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \frac{62 \text{ kg} + 8 \text{ kg}}{35 \text{ kg}} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Těsně po odrazu má stůl rychlost $u = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, tedy dvojnásobnou oproti rychlosti v , což je vzhledem k poměru hmotností celkem intuitivní.

3. Dráhu s_s vypočteme ze vzorce, který jsme již výše použili k nalezení brzdné síly. Za zrychlení však musíme dosadit ze třetího Newtonova zákona $a_s = F/m_s$, čímž dostáváme

$$\frac{F}{m_s} = \frac{u^2}{2s_s} \quad \Rightarrow \quad s_s = \frac{m_s u^2}{2F}.$$

Po dosazení konkrétních hodnot dojdeme k výsledku

$$s_s = \frac{35 \text{ kg} \cdot (4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \cdot 280 \text{ N}} = 1 \text{ m}.$$

To, že je síla úměrná tlakové síle na podložku, znamená, že je úměrná hmotnosti. Můžeme tedy napsat poměr sil jako poměr hmotností a vyjádřit z toho sílu F' .

$$\frac{F'}{F} = \frac{m_s}{m + m_z} \Rightarrow F' = F \frac{m_s}{m + m_z} = 140 \text{ N}$$

Jakmile známe brzdnou sílu F' , nic nám nebrání dosadit do již použitého vzorce pro brzdnou dráhu.

$$s'_s = \frac{m_s u^2}{2F'} = \frac{35 \text{ kg} \cdot (4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \cdot 140 \text{ N}} = 2 \text{ m}$$

Vidíme, že pokud je brzdná síla úměrná síle tlakové, dráha s'_s se změní na 2 m.

Lukáš Linhart

lukasl@vyfuk.org

Úloha III.E ... Vzdálené laboratoře

7 bodů; průměr 4,96; řešilo 27 studentů

Na adresách <https://bit.ly/2HsaCaC> a <https://bit.ly/33aoVIF> máte přístup ke dvěma vzdáleně řízeným experimentům prováděným na stejném zařízení. Prvním je detekce částic radioaktivního záření v závislosti na vzdálenosti vzorku od detektoru (stínění vzduchem) a druhým je detekce při konstantní vzdálenosti, ale se stíněním rozdílně tlustými destičkami různých materiálů.

Detektor snímá částice vždy po určitý čas a měření opakuje, protože pro každý časový interval vzorek vyzáří různý počet částic. Vyberte si jeden z experimentů a po přečtení všech informačních textů proměřte vzorek ve všech nabízených délkách, či stíněních.

V teoretické části vašeho řešení popište experiment, jak mu rozumíte a především dobře svými slovy popište vaše experimentální uspořádání i zdroj záření. Údaje použijte na určení průměrného průběhu množství zachycených částic za daný interval v závislosti na vzdálenosti či stínění a nezapomeňte přiložit graf a tabulku hodnot (zprůměrovaných z opakovaných měření za několik intervalů – počet intervalů si sami určete). (Úlohu nemusíte zpracovávat podle pokynů na dané webové stránce v sekci Zpracování / Zpracování naměřených dat, ale jen dle pokynů zde.) Vysvětlete svými slovy, proč jsou hodnoty takové, jaké jsou.

Upozornění: Experiment je veřejný, a proto není dobrý nápad se k němu dostat na poslední chvíli! Pokud jej někdo používá, ovládání je pro ostatní uživatele zablokováno nejdéle na 20 minut. V takovém případě musíte přijít později, proto doporučujeme úlohu zpracovat s předstihem (blokování může být ale způsobeno i tím, že jste otevřeli oba zmíněné odkazy naráz). Pokud něco nefunguje, kontaktujte nás rovnou na vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz či tel. číslo +420 728 060 232.

Teorie

V mnoha látkách dochází časem k rozpadu atomů – jádro atomu se změní na jiné, anebo, v případě těch těžkých, se dokonce může rozdělit na dvě nová menší. Jelikož takováto jádra mají méně energie než atom původní, zbylou energii vyzaří obvykle v podobě nějaké částice. Tomuto procesu říkáme jaderný rozpad a látky, které jím prochází, pak nazýváme radioaktivní.

Podle druhu vyzářené částice rozlišujeme několik základních typů záření:

- Alfa záření – α částice, neboli jádra helia ${}^4_2\text{He}$
- Beta záření – β^- částice, neboli elektrony e^- ; β^+ částice, neboli pozitrony ${}^{10}e^+$
- Gamma záření – γ částice, neboli fotony

Tyto částice mají různou velikost i energii, tedy je lze různě dobře „zastavit“ (neboli odstínit) různými materiály o různé tloušťce. Právě toto je základem našeho experimentu. Podle popisu experimentálního uspořádání, který můžeme najít na odkázaných stránkách, máme k dispozici zdroj záření gamma – nejhůře odstínitelného záření,¹¹ pro jehož stínění se používají materiály s vysokou hustotou, například olovo. Uvnitř zdroje je trocha americia s atomovým číslem 241, značeno ${}^{241}\text{Am}$, které má podle našich stránek „deklarovanou aktivitu“ 200 kBq (200 kilobecquerelů), což znamená, že se v něm každou sekundu rozpadá zhruba 200 tisíc atomů americia-241 na atomy jiných prvků.¹²

Dále zde najdeme dva Geiger-Müllerovy detektory. První připevněný na polohovacím zařízení měří radioaktivní částice ze záříče. Kromě těchto ovšem zachytí i částice z přirozeně radioaktivního pozadí, proto máme ještě druhý detektor, který měří aktivitu pozadí, abychom mohli od naměřených částic odečíst přibližný počet částic, které nebyly z měřeného zdroje.

Měření provádí stroj, je tedy zbaveno faktoru lidské chyby, což jej dělá velmi přesným. Stále je ovšem zatíženo chybou. Tentokrát má na chybu největší vliv samotný zdroj záření, protože nevyzaří v daném intervalu vždy stejně částic. Je to jako loterie – rozdáme padesát tisíc, ale můžeme je rozdat padesáti lidem po tisícovce (zdroj vyzáří jednu částici každých x sekund), nebo jednomu dáme celou částku (zdroj vyzáří deset částic najednou, ale kolem této události je dlouho klid). Silně záleží na tom, do které chvíle se zrovna trefíme, proto nemůžeme vždy stejný počet částic, tedy je potřeba měření opakovat. Krom opakování jej ale můžeme zpřesnit i měřením na největším časovém intervalu 60 s.

Stínění vzdáleností od záříče V této variantě experimentu (dostupné pod prvním odkazem v zadání) nemáme (krom vzduchu) žádné stínění a měříme závislost počtu zachycených částic ionizujícího (radioaktivního) záření na vzdálenosti od zdroje.

Ionizující záření γ je záření jako každé jiné (jen na specifických vlnových délkách), tedy nebude překvapením, že by se mělo chovat jako všechna ostatní záření a jeho intenzita by měla klesat s druhou mocninou vzdálenosti. Počet naměřených částic po odečtení pozadí by tedy měl taktéž klesat s druhou mocninou vzdálenosti

$$N = N_n - N_p = \frac{a}{d^2},$$

¹⁰Pozitrony mají stejnou hmotnost i ostatní vlastnosti jako elektrony, ale kladný náboj.

¹¹Pro představu k odstínění záření alfa stačí i list papíru, proto alfa záříče potkáme například v některých detektorech kouře. Kouř mezi záříčem a detektorem odstíní záření, tedy vzduchu v měřicí komůrce detektoru poklesne vodivost, kterou detektor měří, takže se spustí poplach.

¹²V praxi je aktivita vždy menší, protože vzorek stárne a jak jádra původního druhu ubývají, zpomaluje se také přeměna v celém vzorku a aktivita klesá. U americia to však nevádí, protože většina vzorků v laboratořích může být stará nejvýše pár desítek let, a ${}^{241}\text{Am}$ má přitom poločas přeměny více než 400 let.

kde N je počet detekovaných částic ze zdroje, N_n je počet částic naměřených (včetně pozadí), N_p je počet částic pozadí, d je vzdálenost a a je nějaká konstanta, jejíž hodnota je závislá na vlastnostech zdroje, zejména jeho aktivitě, tedy tomu, kolik částic v nějakém časovém intervalu vyzáří, jakého druhu tyto částice jsou, jakou mají energii apod.

Stínění různými materiály V této variantě (druhý odkaz) se detektor nachází vždy ve stejné vzdálenosti od záříče. Pro stínění máme k dispozici různé materiály o různých tloušťkách.

Částice záření jsou brzděny nárazy do atomů těchto materiálů. Čím je tedy materiál tlustší, tím více vrstvami atomů musí částice záření projít, tedy má větší šanci, že cestou narazí, a tak by materiál o větší tloušťce měl stínit lépe. Těžké kovy mají současně atomy o větším poloměru, s čímž opět částicím záření roste pravděpodobnost, že budou materiálem pohlceny. Měli bychom tedy naměřit méně částic s větší tloušťkou materiálu, což nám potvrdí měděné plíšky, a současně olovo, jakožto nejtěžší z kovů, by mělo stínit nejlépe, vzduch naopak nejhůře. Z periodické tabulky prvků pak vyčteme, že nejhůře by měl stínit hliník, následuje železo, pak měď a nakonec olovo (za předpokladu, že všechny materiály mají stejnou tloušťku, což v tomto experimentu splňují).

Tento experiment ukazuje rovnou dva jevy – závislost naměřeného počtu částic na tloušťce materiálu a na druhu materiálu. Výsledky měření tohoto experimentu proto shrneme pro každou popisovanou závislost zvlášť, aby byl výsledek lépe vidět.

Měření

Měříme, jak je zmíněno výše, na časovém intervalu $t = 60$ s pro všechna měření všech experimentů. Dále pak měření pro vyšší přesnost desetkrát opakujeme. V tabulkách níže jsou zaznamenány průměrné hodnoty ze všech deseti měření pro každou konfiguraci.

Měření průměrujeme, ovšem měříme počet částic, tedy nedává smysl zaokrouhlovat s desetinnými místy, proto počty naměřených částic zaokrouhlujeme zásadně na čísla celá. Nejistotu počítáme jako absolutní odchylku podle návodu, který najdete na našich stránkách v sekci Hokus Pokus!¹³

Závislost na vzdálenosti od záříče Z tabulky 1 vidíme, že počet detekovaných částic se vzdáleností opravdu klesá.

Abychom mohli ověřit, zda opravdu klesá podle vztahu uvedeného v teorii, musíme sestavit graf. Do grafu vyneseme všechny body včetně chybových úseček, které vyznačují interval, na kterém se podle našeho měření nachází správná hodnota.

Pro vynesení křivky funkce vztahu z teorie ovšem neznáme jednu konstantu. Necháme proto křivku vynést libovolný program sestavující grafy, který si konstantu umí dopočítat (např. Gnuplot či Excel). Graf takzvaně prokládáme křivkou.¹⁴ Program na tvorbu grafů vypočítá konstantu tak, aby křivka procházela intervaly co nejvíce hodnot, ovšem ne vždy je možné obsáhnout všechny. Z grafu pak vidíme, jak moc se nám měření vzdaluje od nějakého ideálu vyznačeného právě naší proloženou křivkou. Křivka tedy nepopisuje skutečné hodnoty, nýbrž ukazuje, jestli se naše měření chová tak, jak by mělo. Někdy jednoduše neumíme dohledat, co nám vyjít mělo, tedy pro kontrolu chceme alespoň vidět, jestli nám například hodnoty místo

¹³https://vyfuk.mff.cuni.cz/rady_a_tipy/hokus_pokus

¹⁴Ve škole jste se mohli setkat spíše s proložením přímkou, která se dobře rýsuje ručně, tedy je jednodušší odhadnout, kudy by měla vést.

$\frac{d}{\text{cm}}$	N_n	N_p	N	ΔN_n	ΔN_p	ΔN
5	267	26	241	14	2	16
7	176	27	149	7	2	9
9	123	28	95	4	4	8
11	92	28	64	6	5	11
13	79	26	53	5	4	9
15	61	28	33	4	2	6
17	56	25	31	3	4	7
19	47	28	19	4	3	7
21	45	27	18	6	3	9

Tabulka 1: Počet detekovaných částic v závislosti na vzdálenosti od záříče. Deltý označují absolutní odchylky.

lineárně nerostou logaritmicky. To by totiž mohlo znamenat, že máme v měření chybu, přestože nevíme, jestli se některá z hodnot náhodou netrefila do té skutečné, kterou neznáme.

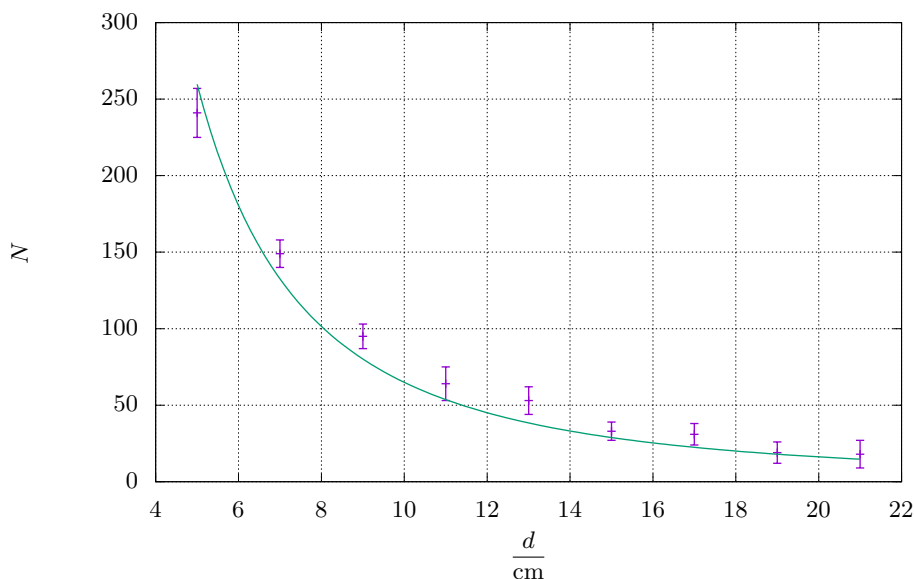
Jak můžeme z grafu na obr. 14 vyčíst, o trochu více než polovina naměřených hodnot má v intervalu i tu ideální z proložené funkce. Ostatní se nám podařilo naměřit vždy lehce nad ideální hodnotou. Můžeme očekávat ještě větší přiblížení k ideální křivce při provedení většího počtu měření.

Závislost na tloušťce měděné destičky Jak můžeme z tabulky 2 vyčíst, opět nám počet detekovaných částic klesá s rostoucí tloušťkou w měděné destičky.

$\frac{w}{\text{mm}}$	N_n	N_p	N	ΔN_n	ΔN_p	ΔN
0,5	125	25	100	7	4	11
1,0	72	28	44	6	3	9
1,5	49	26	23	7	3	10
2,0	35	28	7	5	2	7
2,5	28	27	1	3	3	6

Tabulka 2: Počet detekovaných částic v závislosti na tloušťce měděné destičky

Za bližší prozkoumání určitě stojí data od destičky o tloušťce $w = 2,5\text{ mm}$, pro kterou jsme detekovali pouze jedinou částici s chybou 6, tedy nám její interval zasahuje do záporných hodnot. Jak z tabulky níže vidíme, podařilo se v několika případech naměřit více částic z pozadí, než z pozadí a zdroje dohromady. Neznamená to však, že by měděná destička částice z pozadí přitahovala a odtrhávala je od detektoru. Tento podivný jev je způsoben rozdílným umístěním detektoru pro zdroj záření a pro aktivitu přirozeného radiačního pozadí. My předpokládáme, že pozadí se chová ve všech místech stejně, tedy když na jednom místě naměříme x částic, stejně bychom jich naměřili i na kterémkoliv jiném místě. To ovšem není tak úplně pravda. Stejně jako když budete do dvou kelímků kutálet hrnek kuliček, nemůže spadnout jedna do dvou kelímků zároveň, nemůže ani jedna částice vletět současně do dvou detektorů. Jejich počty



Obrázek 14: Závislost počtu detekovaných částic na vzdálenosti od záříče. Velikost chybových úseček odpovídá absolutním odchylkám.

si budou velmi podobné, ovšem nebudou nutně stejné. Pokud nám tedy materiál jako měď o tloušťce $w = 2,5 \text{ mm}$ odstíní záření ze zdroje úplně, měří oba detektory pouze pozadí, tedy můžeme získávat záporné hodnoty počtu detekovaných částic.

Naopak u měděné destičky o tloušťce $w = 2 \text{ mm}$, pro kterou jsme rovněž naměřili nízké číslo, z tabulky výše vidíme, že detektor namířený na zdroj záření zaznamenával částic zásadně více než detektor zaznamenávající pouze pozadí. Takto poznáme, že destička ještě neodstínila všechno záření.

Při pohledu na graf na obr. 15 navíc vidíme, že pokles detekovaného počtu částic není lineární. Tato závislost je ovšem složitější a setkáte se s ní až při pozdějším studiu, tedy ji zde nebudeme rozebírat. Zájemci ji i s vysvětlením najdou pod odkazy ze zadání.

Závislost na druhu materiálu o tloušťce $w = 1,0 \text{ mm}$ V tabulce 4 vidíme, že i výsledek tohoto měření odpovídá předpokladu – s rostoucím atomovým poloměrem opravdu roste schopnost materiálu odstínit gamma záření.

Vidíme, že hliníková destička se ukázala na stínění silně neúčinná. V kontrastu s hliníkem olovo odstínilo všechno záření. Stejně jako u nejtlustší měděné destičky v předchozí části, tak i zde při pohledu na data, která jsme získali přímo z laboratoře (tabulka 5), vidíme, že se nám v některých případech podařilo naměřit méně částic detektorem namířeným ke zdroji záření, než detektorem, který měřil pouze přirozené pozadí. Všechny výsledky jsme taktéž shrnuli do grafu č. 16.

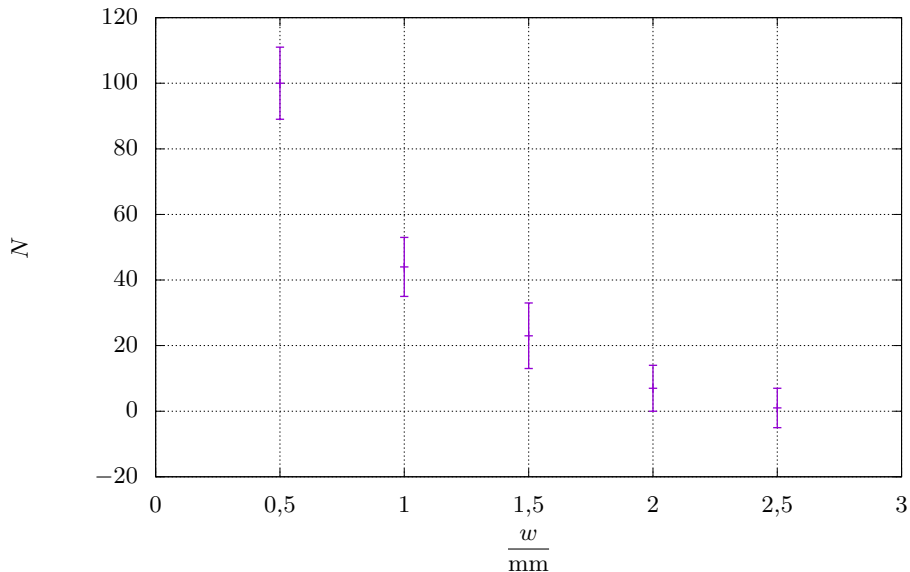
Měď $w = 2,5 \text{ mm}$

N_n	N_p
24	27
32	32
22	29
30	31
30	25
27	32
30	19
25	24
29	26
28	25

Měď $w = 2 \text{ mm}$

N_n	N_p
36	26
30	29
30	30
36	31
30	29
38	28
43	21
44	28
30	29
32	24

Tabulka 3: Naměřený počet částic včetně pozadí N_n a současně detekovaných částic pozadí N_p pro měděnou destičku o tloušťce $w = 2 \text{ mm}$ a $w = 2,5 \text{ mm}$



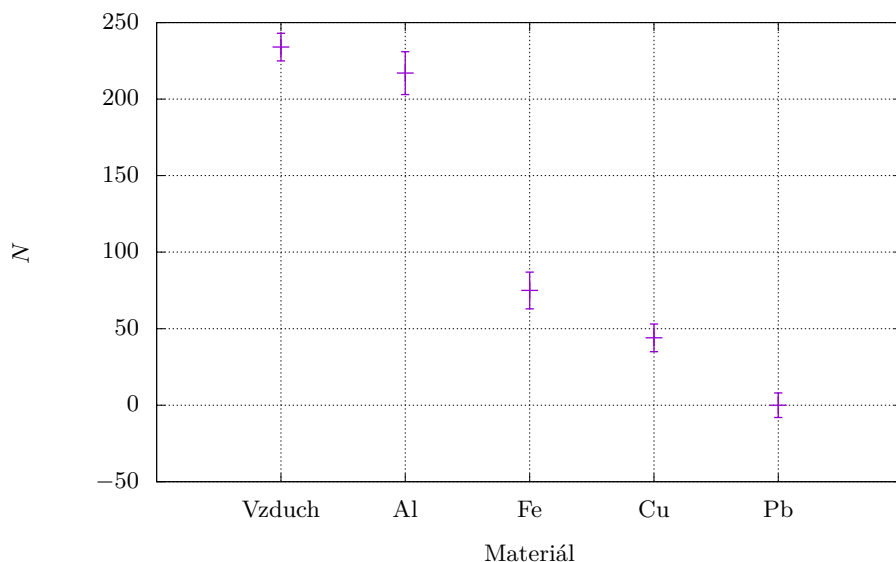
Obrázek 15: Závislost počtu detekovaných částic na tloušťce měděné destičky

Materiál ($w = 1,0 \text{ mm}$)	N_n	N_p	N	ΔN_n	ΔN_p	ΔN
Vzduch	261	27	234	5	4	9
Al	242	25	217	11	3	14
Fe	100	25	75	7	5	12
Cu	72	28	44	6	3	9
Pb	26	26	0	4	4	8

Tabulka 4: Počet detekovaných částic v závislosti na druhu materiálu o tloušťce $w = 1,0 \text{ mm}$ Olovo ($w = 1,0 \text{ mm}$)

N_n	N_p
29	27
31	25
25	33
24	27
20	22
26	21
30	17
30	27
21	33
20	32

Tabulka 5: Naměřený počet částic včetně pozadí N_n a současně detekovaných částic pozadí N_p pro olověnou destičku o tloušťce $w = 1,0 \text{ mm}$



Obrázek 16: Závislost počtu detekovaných částic na typu materiálu o tloušťce $w = 1,0 \text{ mm}$

Závěr

Měřením jsme ověřili, že počet detekovatelných částic gamma záření ze zdroje záření klesá a děje se tak s druhou mocninou vzdálenosti od zdroje. Současně také počet detekovatelných gamma částic ze zdroje záření klesá i s tloušťkou materiálu, a to nelineárně. Nakonec schopnosti stínit ovlivňuje i druh materiálu, a to především atomový poloměr prvku, ze kterého se stínění skládá. Čím je větší, tím lépe materiál stíní. Proto stínění hliníkem o tloušťce $w = 1,0 \text{ mm}$ bylo velmi malé, naopak olovo o stejné tloušťce odstínilo všechno záření. Veškeré záření odstínila rovněž měděná destička o tloušťce $w = 2,5 \text{ mm}$. Všechna měření jsme prováděli na časovém úseku $t = 60 \text{ s}$.

Za povšimnutí rovněž stojí poměrně velká přesnost měření, které tentokrát není zatíženo lidskou chybou, protože všechno za nás hlídají přístroje. Ve srovnání s nerovnoměrností jaderného rozpadu ve zdroji záření a v přirozeném pozadí tak byla chyba aparatury zanedbatelná a můžeme prohlásit, že nejistota měření byla způsobena pouze nepředvídatelností jaderného rozpadu a pohlcování částic.

Poděkování

V neposlední řadě bychom jménem organizátorů rádi poděkovali doc. RNDr. Františku Lustigovi, CSc. a Katedře výuky obecné fyziky za provozování vzdálených laboratorů, možnost využít jejich experiment pro korespondenční seminář a spolupráci a technickou podporu po celý průběh třetí série desátého ročníku Výfuku.

Soňa Husáková
sona@vyfuk.org

Úloha III.V ... Mikroskopická

7 bodů; průměr 5,00; řešilo 29 studentů

Julča má nový mikroskop a začala přemýšlet, co si pod ním zobrazí. Jelikož ji zajímá i mikrobiologie, napadlo ji, že by si mohla zobrazit prvoka, kterého by normálně neměla možnost tak detailně spatřit.

1. Vypočítejte skutečnou velikost tohoto prvoka a příčné zvětšení mikroskopu, když víte, že úhlové zvětšení mikroskopu je 125, velikost obrazu je 0,5 cm a předmětová ohnisková vzdálenost okuláru je 2 cm.
2. Jelikož Julča chtěla pořádně prozkoumat možnosti mikroskopu, vyměnila stávající objektiv za jiný, který má zvětšení $40\times$, a chtěla jej nastavit tak, aby viděla prvoka stejně zvětšeného jako předtím. Jaké úhlové zvětšení okuláru musí použít?
3. Na jakou délku musí v tomto případě nastavit tubus mikroskopu (okulár vzdálit od objektivu), aby mohla vidět onen stejně zvětšený ostrý obraz za předpokladu, že nový objektiv má obrazovou ohniskovou vzdálenost 1 mm?

1. K řešení úlohy použijeme všechny vzorce uvedené ve Výučení. Nejprve si ze zadaných hodnot dopočteme úhlové zvětšení okuláru. Dosadíme konvenční zrakovou vzdálenost, která je pro zdravé oko 25 cm, a předmětovou ohniskovou vzdálenost okuláru 2 cm.

$$\gamma_2 = \frac{d}{f_0}$$

$$\gamma_2 = \frac{25}{2}$$

$$\gamma_2 = 12,5$$

Již známe úhlové zvětšení okuláru a úhlové (celkové) zvětšení mikroskopu. Dále můžeme zjistit příčné zvětšení objektivu.

$$\gamma = Z \cdot \gamma_2$$

$$125 = Z \cdot 12,5$$

$$Z = 10$$

Příčné zvětšení objektivu je 10 a skutečná velikost prvoka tedy je:

$$Z = \frac{y'}{y},$$

$$10 = \frac{0,5}{y},$$

$$y = 0,05 \text{ cm} = 0,5 \text{ mm}.$$

2. Objektiv se zvětšením 10 vyměníme za jiný se zvětšením 40, přičemž chceme prvoka vidět se stejným zvětšením, tedy 125. Počítat budeme úhlové zvětšení okuláru γ_2 .

$$\gamma = Z \cdot \gamma_2$$

$$125 = 40 \cdot \gamma_2$$

$$\gamma_2 = 3,125$$

Julča musí použít okulár se zvětšením 3,125.

3. Při výměně objektivu je potřeba preparát na stolku znovu zaostřit. Běžně se pro zaostření posouvá stolek s preparátem pomocí makrošroubu blíže k objektivu. V naší úloze budeme zaostřovat změnou délky tubusu mikroskopu, jinými slovy – budeme zjišťovat novou vzdálenost mezi objektivem a okulárem. Ta je dána součtem ohniskových vzdáleností f, f_0 a optického intervalu mikroskopu Δ .¹⁵

$$Z = \frac{\Delta}{f}$$

$$40 = \frac{\Delta}{1 \text{ mm}}$$

$$\Delta = 40 \text{ mm}$$

Z Výfučtení též známe modifikaci vzorce pro celkové zvětšení mikroskopu

$$\gamma = \frac{\Delta}{f} \cdot \frac{d}{f_0},$$

$$125 = \frac{40}{1} \cdot \frac{250}{f_0},$$

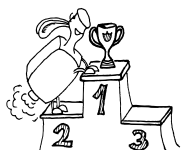
$$f_0 = 80 \text{ mm}.$$

Celkem je vzdálenost mezi objektivem a okulárem rovna $40 \text{ mm} + 80 \text{ mm} + 1 \text{ mm} = 121 \text{ mm} = 12,1 \text{ cm}$.

K řešení celé úlohy jsme použili vzorce z Výfučtení v nezměněné podobě. Věřím, že vám jeho přechtení přineslo plný počet bodů.

Julie Weisová
julca@vyfuk.org

¹⁵Dejte pozor na dosazování shodných jednotek délky!



Pořadí řešitelů po III. sérii

Kategorie šestých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
		5	5	6	6	7	7	7	43	129
1.–2. Julie Krčmařová	G Volgogradská 6a, Ostrava	3	–	6	–	–	–	–	9	14
1.–2. Alžběta Sochorová	G, Blovice	3	–	–	–	–	–	–	3	14
3. Kamila Vaníčková	ZŠ Na Šutce, Praha 8 - Troja	5	–	–	–	–	–	–	5	10
4.–6. Naděžda Nečadová	Základní škola nám. Curieových P	–	–	–	–	–	–	–	–	5
4.–6. Václav Prachař	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	–	5
4.–6. Anežka Prachařová	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	–	5

Kategorie sedmých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
		5	5	6	6	7	7	7	43	129
1.–2. Vojtěch Černý	G Jana Keplera, Praha	4	5	6	6	7	5	4	37	111
1.–2. Kamilo Tomáš	G Jana Keplera, Praha	3	2	6	6	7	7	5	36	111
3. Kosma Šatánek	ZŠ a MŠ Telecí	1	2	2	3	3	3	3	17	85
4. Klára Souza de Joode	G Jana Keplera, Praha	5	3	2	–	–	–	–	10	43
5. Jan Novák	G, Písek	–	–	–	–	–	–	–	–	16
6. Nina Naxerová	G Jana Keplera, Praha	3	–	–	–	–	–	–	3	12

Kategorie osmých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	114
1. Stela Srpová	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	6	5	7	6	7	36	108
2. Lada Srpová	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	6	5	7	5	7	35	107
3. Michal Stroff	G, Budějovická, Praha	–	5	6	6	5	6	3	31	103
4.–5. Veronika Menšíková	Arcibiskupské G, Praha	–	5	5	5	7	5	5	32	96
4.–5. Jiří Preč	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	5	6	4	7	4	7	33	96
6. Adam Pustka	G F. X. Šaldy, Liberec	–	5	6	5	5	6	3	30	91
7. Damian Šatánek	ZŠ a MŠ Telecí	–	2	3	3	3	3	3	17	77
8. Vojtěch Janáček	G F. X. Šaldy, Liberec	–	3	6	–	2	4	4	19	76
9. Ester Šlapotová	G Frýdecká, Český Těšín	–	5	6	3	7	–	5	26	58
10. Michal Dobrovolný	G Masarykovo nám., Třebíč	–	4	3	3	–	3	2	15	51
11.–12. Vojtěch Novosad	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	3	2	3	2	2	4	16	50
11.–12. Ludmila Šírová	Mensa G, Praha 6	–	5	6	4	6	7	3	31	50
13. Mark Joly	G, Havlíčkův Brod	–	3	6	–	2	–	5	16	48
14. Jana Vestfálová	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	–	6	–	3	–	–	9	35
15. Jan Ševeček	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	–	6	2	0	–	–	8	34
16. Vít Novák	ZŠ Chyšky	–	1	2	–	–	–	–	3	32
17. Bartoloměj Vaníček	ZŠ Na Šutce, Praha 8 - Troja	–	5	6	–	–	6	–	17	29
18. Vojtěch Mišičko	G, Jateční, Ústí nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	–	27
19. Adam Mikulič	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	25
20. Lea Bumbálková	Mendelovo G, Opava	–	2	–	–	–	–	–	2	23
21. Nina Štefanovičová	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	16

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	114
22.–23. Šimon Mach	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	12
22.–23. Amelie Vítková	G a SOŠP, Čáslav	–	–	–	–	–	–	–	–	12
24. Kristýna Kábrtová	G a SOŠ Havlíčkova, Úpice	–	–	–	–	–	–	–	–	9
25. Tomáš Řehák	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	8
26. Patricie Labuťová	G B. Němcové, HK	–	–	–	1	1	–	–	2	7
27. Alexander Spálený	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	5
28. Melánie Boušková	G Pod Svatou horou, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	–	1

Kategorie devátých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	114
1. Matyáš Matta	Masarykovo G, Plzeň	–	5	6	5	7	6	7	36	108
2. Magdalena Hybnerová	G, Jateční, Ústí nad Labem	–	5	6	6	7	7	5	36	106
3. Eduard Plic	Masarykovo G, Plzeň	–	4	6	4	5	5	7	31	102
4. David Něnička	G, Rožnov pod Radhoštěm	–	5	6	6	6	7	5	35	101
5. Adam Bretšnajder	G Z. Wintra, Rakovník	–	5	6	5	6	6	7	35	98
6.–7. Matouš Mišta	G, Olomouc-Hejčín	–	5	3	6	7	6	7	34	97
6.–7. Ivan Zemlička	G Ústavní, Praha	–	5	6	4	7	3	5	30	97
8. Anastasia Bredikhina	G Jana Keplera, Praha	–	5	6	4	7	6	7	35	96
9. Pavla Šimová	G, Šumperk	–	5	6	6	6	7	7	37	94
10. Michal Sykáček	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	1	6	3	2	4	4	20	78
11. Václav Verner	PORG, Praha	–	5	6	3	3	4	2	23	71
12. Jan Rous	G J. Barranda, Beroun	–	3	6	3	4	–	5	21	69
13. Jan Souchop	G, Mikulov	–	2	6	3	3	–	7	21	63
14. Patrik Kadlec	První české G, Karlovy Vary	–	3	3	–	0	–	–	6	56
15. Lucie Kvitová	G, Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	–	54
16. Vojtěch Muller	G Nad Kavalírkou, Praha	–	5	–	–	–	–	–	5	47
17. Dana Myškeríková	G J. Barranda, Beroun	–	–	–	–	–	–	–	–	33
18.–19. Yasmin Fazla	G, nám. TGM, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	30
18.–19. Jaroslava Zimpllová	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	30
20. Vojtěch Beneš	G J. Palacha, Mělník	–	–	–	–	–	–	–	–	29
21. Jindřich Urban	ZŠ Divišov	–	5	6	6	–	–	–	17	27
22.–23. Tomáš Musil	G, Voděradská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	25
22.–23. Jáchym Předota	G Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	25
24.–25. Jan Havlík	G J. Barranda, Beroun	–	–	–	–	–	–	–	–	23
24.–25. Jakub Merta	ZŠ Brno - Bystrc	–	–	5	–	–	–	–	5	23
26. Eduard Frühauf	G J. Barranda, Beroun	–	–	–	–	–	–	–	–	22
27. Michal Friml	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	21
28.–29. Jakub Škaloud	G Opatov, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	20
28.–29. Lucie Židková	G Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	20
30. Teo Bumbálek	Mendelovo G, Opava	–	–	6	–	–	–	–	6	14
31. Jan Kroupa	ZŠ T. G. Masaryka Klatovy IV	–	–	–	–	–	1	–	1	13
32. Štěpán Berek	ZŠ Dobrá	–	–	–	–	–	–	–	–	11
33. Klára Nabiová	ZŠ Velké Březno	–	–	–	–	–	–	–	–	8
34. Rebeka Heřmanová	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	7
35. Jan Vacek	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	5
36. Robert Ernest	G, Voděradská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	3
37. Matyáš Malát	ZŠ T. G. Masaryka Klatovy IV	–	–	–	–	–	–	–	–	1



*Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8*

www: <https://vyfuk.org>
e-mail: vyfuk@vyfuk.org



/ksvyfuk



@ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.