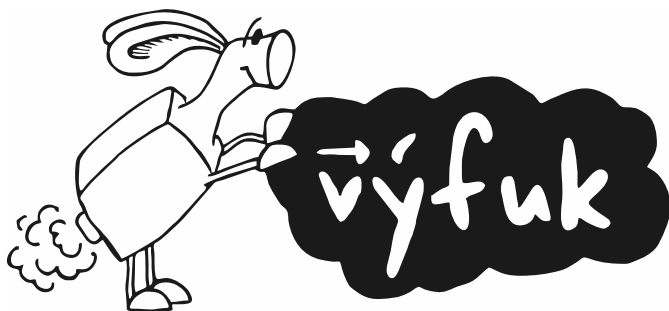




výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

Výfuk je zde pro vás i v novém roce 2021, o kterém všichni doufáme, že bude lepší než ten loňský a umožní nám se s vámi potkat i na nějaké prezenční akci. Zatím máme v plánu tradiční letní tábor, který by se měl uskutečnit 25. 7. – 7. 8. a budeme na něj zvát podle výsledků třetí série. Co nás čeká dále, je jarní setkání, které podle situace proběhne buď prezenčně nebo distančně přes náš Discord.

V této brožurce naleznete zadání 4. série, kde vás čeká úvaha o Výfučkovi jako o moderním kovbojovi, zapeklitý kladkostroj či experimentálka na netradiční metodu měření hustoty. Výfučtení se tentokrát zabývá fotometrií, což je oblast astronomie, jejíž metody se využívají například při hledání exoplanet. V brožurce dále naleznete i vzorová řešení 2. série a průběžné pořadí po 2. sérii. Opravená řešení naleznete již tradičně v našem pultíku, kde odevzdáváte úlohy.

Hodně zábavy při řešení našich úloh!

Organizátoři

vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz



Zadání IV. série



Termín odeslání: 22. 2. 2021 20.00

Úloha IV.1 ... Věk Roberta ⑥ ⑦

5 bodů

Robert bude mít za chvíli narozeniny, a tak si ještě chce užít svůj současný věk. Začal tedy vymýšlet různé příklady a spojitosti. Jelikož ale organizuje Výfuk, napadla ho slovní úloha s Výfučkem:

Před čtyřmi lety byl Výfuček přesně třikrát mladší, než je Robert teď, ale Robert byl před dvěma lety jen dvakrát starší než Výfuček v té stejné době. Kolik let je letos Robertovi?

Úlohu neřešte tak, že znáte momentální věk Výfučka, ale pomocí rovnic.

Úloha IV.2 ... Rád vařím ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

5 bodů

Petr rád vaří a ví, že to umí. Proto se rozhodl udělat si guláš. Rozkrojil cibuli na dvě stejné půlky a jednu polovinu začal krájet rychlostí $\xi_1 = 15 \text{ kostek} \cdot \text{s}^{-1}$ (malé řecké xi).

V tom však přišla do místnosti Monika přesně ve chvíli, kdy Petr dokrájel první polovinu cibule. Petr ví, že se holkám líbí, když vaří, takže se zarděl a zpomalil svou rychlost krájení cibule na $\xi_2 = 10 \text{ kostek} \cdot \text{s}^{-1}$. Jaká byla jeho průměrná rychlost krájení cibule $\bar{\xi}$?

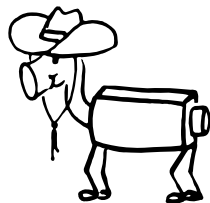
Nápověda: Není to $(\xi_1 + \xi_2)/2$.



Úloha IV.3 ... Odplata ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Výfuček zbožňuje kovbojské historky, hlavně je-li sám hlavním hrdinou. Nejraději vypráví, jak sám zatočil s nezvaným pozorovatelem. V dávných dobách, kdy ještě nikdo soudně neřešil sestřelení dronu kamenem, spatřil kovboj Výfuček pod úhlem 45° ve vodorovné vzdálenosti 80,0 m cizí dron, jak mu rychlostí $39,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ vodorovně letí okoukat měření experimentální úlohy. Jal se tedy bleskově zkonstruovat odstředivý prak, aby dron sestřelil právě ve chvíli, kdy prolétal nad ním. Kolik času na sestavení praku Výfuček měl, aby dron ještě stihl trefit, letí-li střela z praku počáteční rychlostí $44,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$? Kdyby prak dokázal vyrobit mnohem rychleji, jak brzy od spatření dronu už může střílet, aby ho sestřelil? Jak by se situace změnila, pokud by mohl Výfuček vystřelit kámen mnohem rychleji? Jaký je pak nejdelší časový úsek, který má k sestavení praku teoreticky k dispozici? A je vůbec Výfučkova historka reálná?

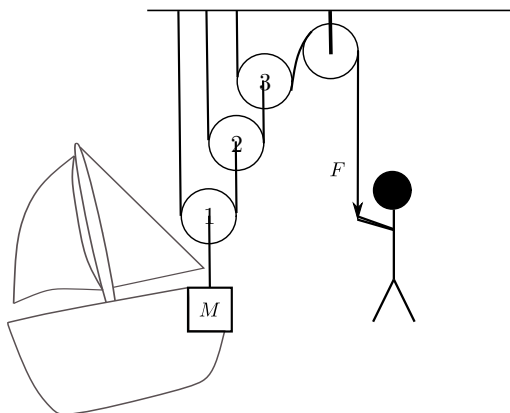


Úloha IV.4 ... Archimédův kladkostroj ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Těžko dohledat, kdy lidé objevili fyzikální princip kladky. Spojení kladek do kladkostroje však poprvé podle pověsti vymyslel již Archimédes, když s jeho pomocí dokázali obyvatelé Syrakus zavléct plně naloženou nákladní loď do přístavu.

Jeden příklad soustavy kladek se nazývá přímo Archimédův kladkostroj a vypadá jako n volných kladek zapojených vždy jedna na druhou spolu s jednou pevnou kladkou. Kladkostroj pro $n = 3$ můžete vidět na obrázku.



Obrázek 1: Archimédův kladkostroj

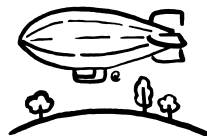
Aby Archimédes přesvědčil obyvatele Syrakus o užitečnosti svého vynálezu, využil kladkostroj, aby sám nadzvedl celou loď. Kolik volných kladek musel Archimédes takto zapojit za sebe, pokud dokáže tahat silou nejvýše $F = 500 \text{ N}$ a potřebuje nadzvednout loď o hmotnosti $M = 200 \text{ t}$?

Úloha IV.5 ... Vzducholoď ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ★

7 bodů

Vzducholoďe mají velmi náročný život. Vztaková síla zodpovědná za jejich let se obvykle lehce spočítá, nicméně v případě vzducholoďe se vnější a dost často i vnitřní podmínky během letu mění. Aby vzducholoď nespadla, musí se tedy neustále regulovat příliv horkého vzduchu.

Představte si třeba, že vzducholoď vylétne ráno, kdy je teplota vzduchu $T_1 = 5,00^\circ\text{C}$ a jeho hustota je $\rho_0 = 1,268 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Uvažujme např. vzducholoď Hindenburg o objemu plynu $V = 200\,000 \text{ m}^3$, která je naplněna vodíkem s hustotou $\rho_1 = 0,0872 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Hmotnost konstrukce vzducholodi je $m = 50 \text{ t}$.



1. Jakou užitečnou hmotnost unese?

Uplyne nějaký čas a již je odpoledne, okolní vzduch se oteplí na $T_2 = 10,0^\circ\text{C}$, zatímco tlak zůstane zhruba stejný.

2. Oteplením se ale změní hustota vzduchu, vypočítejte jak moc, je-li počáteční hustota vzduchu rovna ρ_0 .

Pro výpočet můžeme považovat vzduch za tzv. *ideální plyn*, pro který platí tzv. *Gay-Lussacův zákon*. Tento zákon říká, že pro objem ideálního plynu V a jeho teplotu T platí, že jejich poměr je za stálého tlaku konstantní, tedy

$$\frac{V}{T} = \text{konst.}$$

Pozor, aby tento vzorec platil, musíte použít teplotu v jednotkách Kelvin (tzv. termodynamická teplota). Po této atmosferické změně však vzducholoď musí něco udělat, nebo spadne.

3. Jakou hustotu musí mít vodík, aby se rozeplal dost na to, aby ani při zvýšené teplotě okolního vzduchu vzducholod' neklesala? Nezapomeňte, že objem vaku s vodíkem se mění, ale hmotnost vzducholodi zůstává konstantní.

Hustotu vodíku mohou technici ve vzducholodi regulovat pomocí teploty – mohou vodík zahřívat nebo ochlazovat pomocí kotlů. Tlak vodíku ve vzducholodi musí přitom zůstat stejný jako vnější atmosferický tlak, který uvažujeme, že se nemění.

4. Na jakou teplotu musí zatopit ve vzducholodi, aby se vodík dostal na požadovanou hustotu? Počítejte, že vodík se chová jako ideální plyn.

Nebezpečí vzducholodí poháněných vodíkem spočívá ve velké vznětlivosti tohoto prvku. Ani používáním nevýbušného prvku se však všem nebezpečím nevyhneme. Může se totiž stát, že např. vlivem silného slunečního svitu se plyn ve vzducholodi ohřeje a vzducholod' začne stoupat. Kvůli slunci ztratí technici možnost chladit vodík a začne jim hrozit velké nebezpečí: vzducholod' může prasknout.

Samozřejmě, tomuto jevu se můžou technici bránit upuštěním vodíku. Je však třeba reagovat rychle.

Úloha IV.E ... Voda je nenahraditelná ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Změřte hustotu vody takzvanou substituční metodou. To znamená: vytvořte pevné těleso, které má stejnou hustotu (podíl celkové hmotnosti ku celkovému objemu) jako voda (to poznáte tak, že pokud ho nahradíme vodou, nic se nestane, jinak řečeno: nebude stoupat ani klesat, i když bude zcela ponořeno). Změřte přímo jeho hustotu vážením a měřením a zdokumentujte váš postup výroby.

Svou technologii proveďte vyrobením druhého tělesa pro změření hustoty jiné kapaliny dle vašeho výběru (oleje, medu, octa či čehokoli jiného, zdraví neškodného).

Výsledky poté ověřte u obou kapalin přímým měřením objemu a hmotnosti. Tabulkové hodnoty zde nemají využití, zaměřte se spíše na míru nejistoty vašeho výsledku u obou metod.

Úloha IV.V ... Slunce jasná světů jiných ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Exoplaneta rovnoměrně obíhá kolem mateřské hvězdy po kruhové dráze s poloměrem 0,100 au a periodou 4,00 dny. Zákryt mateřské hvězdy trvá 2,00 hodiny. Od začátku zákrytu po okamžik, kdy se už pozorovaná intenzita nemění, uplyne 30,0 minut. Zastávka v minimu tedy trvá hodinu. Nakreslete světelnou křivku tranzitu exoplanety i s vhodnými popisky os. Určete poloměr mateřské hvězdy a poloměr exoplanety, pokud víme, že se soustava nachází velmi daleko od nás (paprsky přicházejí zhruba rovnoměrně) a že se nacházíme v rovině oběhu planety.

Poznámka: Dále najdete doprovodný text potřebný k vyřešení úlohy.



Výfučení: Fotometrie

Úvod

Jistě jste si všimli, že některé hvězdy na obloze jsou mnohem jasnější než jiné. Jedna z nejdůležitějších oblastí astronomie je fotometrie, jejímž obecným cílem je měřit množství světla. Otázky, které si fotometrie klade, jsou například, jak je pozorovaný objekt na obloze jasný nebo o kolik se zjasnil oproti jinému objektu. Když se mluví o fotometrii, myslí se tím většinou měření viditelného světla, případně také v infračervené nebo ultrafialové části spektra.

V tomto Výfučení nejprve krátce vysvětlíme, na jakém principu fotometrie funguje, následně se zaměříme na nejrůznější astronomické objekty (planety, hvězdy atp.), u kterých vysvětlíme, co pomocí fotometrie můžeme naměřit. Jelikož různých typů objektů je hodně, bude se jednat o poněkud dlouhý text, nicméně věříme, že ne moc komplikovaný.

Fotometrie v rámci astronomie

Nejstarším odvětvím astronomie je *astrometrie*: sledování změny polohy objektů na obloze. Lidé si už velmi dávno všimli, že se planety vůči hvězdné obloze pohybují. Protože se hvězdy vůči sobě na obloze zdánlivě nepohybují, někdy se hvězdám říká stálice. Historicky tento poznatek vedl k představě, že „sféra stálic“ je něčím dokonalým a neměnným.

Díky fotometrii si ale ukážeme, že mnohé ze stálic vykazují nejrůznější změny jasnosti, od pravidelných poklesů, přes zvláštní pulzace až k nepředvídatelným vzplanutím. Těmto zajímavým objektům se říká proměnné hvězdy.

Fotometrie se zabývá i jinými objekty, než jsou hvězdy, například množstvím odraženého světla od asteroidů nebo i světlem ze vzdálených galaxií.

Praktické měření

Základním poznatkem praktické fotometrie je fakt, že všechna měření je třeba provádět relativně. Tedy na otázku „jak je hvězda jasná“ odpovíme s tisíckrát menší přesností než na otázku, „o kolik je pozorovaná hvězda jasnější než srovnávací hvězda“. Takto tomu je v experimentální fyzice velmi často. Proč? Představte si, že chcete s kamarádem zjistit, kdo z vás je vyšší, ale máte pouze pravítko s ryskami po deseti centimetrech. Bude mnohem přesnější, když si k sobě stoupnete zády a přímo srovnáte, kdo je vyšší, než když se zvlášť změříte pravítkem a srovnáte naměřené výšky. Podobně tomu je ve fotometrii.

Historicky se fotometrická měření prováděla tak, že pozorovatel měl v okuláru vybrané tři hvězdy: hvězdu, o které se domníval, že je proměnná, a dvě hvězdy, které byly velmi podobně jasné, a o kterých s jistotou věděl, že proměnné nejsou. V průběhu noci pak zapisoval, jaké pozoruje změny jasnosti proměnné hvězdy oproti srovnávacím.

Dnes měření probíhá tak, že je na dalekohledu umístěna kamera, která pořizuje snímky. Na rozdíl od snímků, které pořizujete například telefonem, jež mají expoziční dobu v řádu zlomků sekundy, jsou astronomické snímky pořizovány s expoziční dobou v řádu desítek sekund.¹ Tyto

¹ Expoziční doba je čas, po který světlo může dopadat na snímač. Pokud ji prodloužíme, můžeme zaznamenat temnější objekty za cenu toho, že se v záběru nesmí tolik pohybovat, a také se na snímač dostane více šumu.

kamery bývají chlazené, což snižuje množství šumu na snímku. To proto, že se tím dramaticky sníží počet nahodilých infračervených fotonů, které detektory zachycují stejně jako světlo.

Digitální snímky jsou jenom zobrazení tabulky čísel: tam, kde je na snímku světlá oblast, mají pixely vysoké hodnoty, kde je úplná tma, mají pixely hodnotu nula.

Světelné křivky

Světelná křivka je graf závislosti množství pozorovaného světla na čase. To znamená, že množství světla vynásíme na vísloou osu a čas na vodorovnou osu. Jsou-li pozorované změny jasnosti objektu pravidelné, můžeme určit periodu této změny. Často se pak setkáváme s pojmem „fáze“, která má v podstatě stejný význam jako fáze Měsíce. S každým primárním (nejhlubším) minimem počítáme, že současná fáze končí a začíná další. V případě, že určíme periodu změn jasnosti objektu, můžeme pro zvýšení přesnosti změn sloučit několik pozorování do jedné světelné křivky, přičemž na vodorovnou osu nevynásíme čas, ale fázi.

Dvojhvězdy

Velmi často pozorujeme dvojhvězdy, což jsou dvě hvězdy, které obíhají kolem společného těžiště. Odhaduje se, že více než polovina hvězd ve vesmíru je součástí nějakého vícenásobného systému. V naprosté většině případů se ale dvojhvězdy jeví pozorovatelům ze Země jako jeden bod. To proto, že vzhledem k tomu, jak jsou od nás daleko, jsou u sebe velmi blízko.

Jak tedy víme, že se jedná o dvě hvězdy, které obíhají kolem společného těžiště? Víme to díky tomu, že některé tyto dvojhvězdy jsou natočené tak, že se při vzájemném oběhu při pohledu ze Země zakrývají. Dvojhvězdy mohou být velmi rozmanité a představují jeden ze základních nástrojů k určování hmotností vesmírných těles.

Jednotlivým hvězdám ve dvojhvězdě se říká její složky. V průběhu jednoho vzájemného oběhu dochází ke dvěma zákrytům. Je trochu neintuitivní, že při obou zákrytech je z našeho pohledu zakryta stejná plocha. Přesto se stává, že jeden zákryt je hlubší než ten druhý. Je to díky tomu, že hvězdy nemusí mít stejnou povrchovou teplotu. Ze stejně velké plochy vyzáří teplejší hvězda mnohem více energie než hvězda chladnější. energii, kterou vyzáří jeden metr čtvereční povrchu hvězdy za sekundu, můžeme popsat hustotou zářivého toku I (měřenou ve wattech na metr čtvereční, $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$), pro kterou platí:

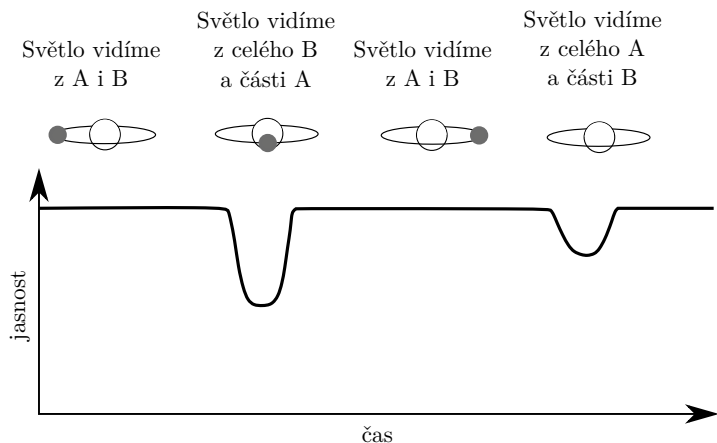
$$I = \sigma T^4,$$

kde T je povrchová teplota hvězdy a σ Stefan-Boltzmannova konstanta.² Tento vztah pak označujeme jako Stefan-Boltzmannův zákon.

Hlubšímu zákrytu říkáme primární a mělčímu sekundární. Podobně hvězdě, která je zakryta v primárním zákrytu, říkáme primární složka a hvězdě zakryté v sekundárním zákrytu sekundární složka.

Typickým příkladem zákrytových dvojhvězd jsou tzv. Algolidy (obr. 2), pojmenované podle hvězdy Algol, která však, jak se později ukázalo, Algolidou není. Jak již bylo řečeno, při zakrytí primární složky A vzniká hlubší primární minimum, při zakrytí sekundární složky B vzniká sekundární minimum. Mimo minima je u Algolid světelná křivka rovná, jelikož se hvězdy nijak nezakrývají. Zakulacený tvar minim vzniká kvůli pomalému a postupnému zákrytu složek. O tom, zda je minimum uprostřed ploché, či ne, rozhoduje sklon roviny oběhu složek vůči směru k Zemi a také relativní velikost obou složek.

²Hodnota Stefan-Boltzmannovy konstanty je přibližně $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$.



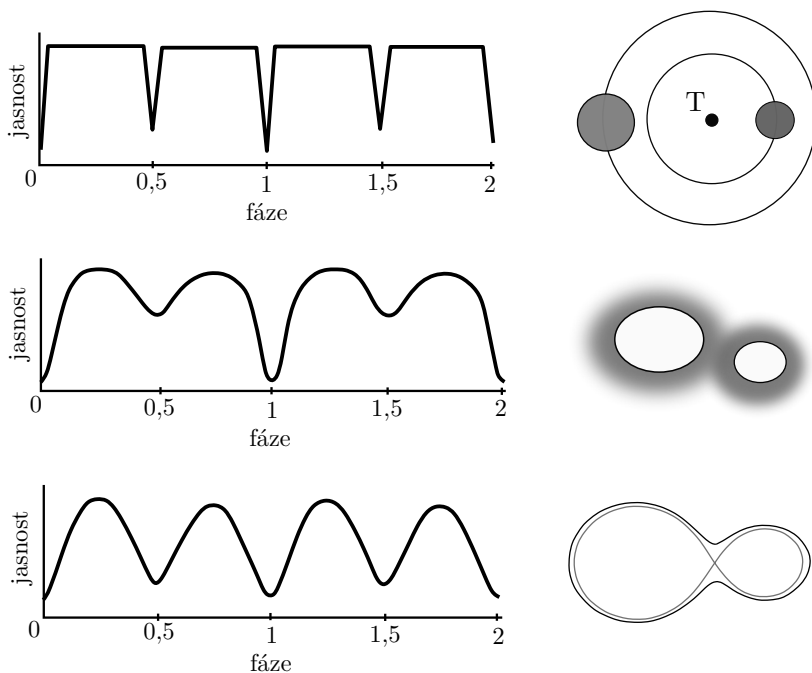
Obrázek 2: Světelná křivka zákrytové dvojhvězdy typu Algol

Rozlišujeme celkem tři typy zákrytových dvojhvězd. V horní části obrázku 3 je opět světelná křivka dvojhvězdy typu Algol, která je charakteristická tím, že se jasnost mimo minima téměř nemění, protože jsou složky od sebe dostatečně daleko. Nedochází tedy k silnějším deformacím či přetoku hmoty mezi složkami. Uprostřed je světelná křivka dvojhvězdy typu beta Lyrae, jejíž složky jsou již tak blízko u sebe, že se jasnost mění neustále. Navíc dochází k přetoku hmoty z větší složky na menší po tzv. akrečním disku a obě složky jsou znatelně deformované. Dole je světelná křivka dvojhvězdy typu W Ursae Maioris, která se od typu beta Lyrae liší především téměř shodnými hloubkami primárního a sekundárního minima a také významně kratší periodou. Složky jsou velmi deformované, téměř se dotýkají, mají společnou atmosféru a kvůli intenzivnímu přetoku hmoty mezi složkami také proměnnou periodu.

Fyzické proměnné hvězdy

Proměnnost hvězdy nemusí být způsobena pouze zákrytem. Změny jasnosti pozorujeme i z úplně jiných důvodů, jakými mohou být pulzace hvězdy, erupce nebo skvrny na jejím povrchu či její zhroucení a exploze. Obecně tedy kvůli změnám fyzických vlastností hvězdy. Na rozdíl od zákrytových dvojhvězd nemají světelné křivky fyzických proměnných hvězd pevně určené primární a sekundární minimum, ale naopak mohou být i zcela nepravidelné. Díky tomu můžeme tyto skupiny od sebe rozeznat.

Nejznámější podtřídou fyzických proměnných hvězd jsou tzv. *cefeidy*. Jedná se o pravidelně pulzující hvězdy, světelné křivky tedy mají v jedné fázi jedno minimum a jedno maximum (obr. 5). Pulzace hvězdy je způsobena rozpínáním a smršťováním jejích podpovrchových vrstev, za což může vyvažování tlaku záření (fotony, které hvězda vyzařuje, vytvářejí tlak, jenž hvězdu zvětšuje) a gravitace působící na vrstvy. V minimu je tedy hvězda nejmenší a tlak záření je tak silný, že překonává gravitaci, proto se hvězda rozpíná. Vrstvy se tedy vzdalují od jádra a gravitace, která tento tlak vyrovnává, je čím dál slabší, proto probíhá rozpínání velmi rychle. Současně se ale zmenšuje tlak záření, a to rychleji než gravitace, takže v maximum je překonán gravitací. Ta začne hvězdu vracet opět do minima, avšak brání jí v tom rostoucí tlak záření,



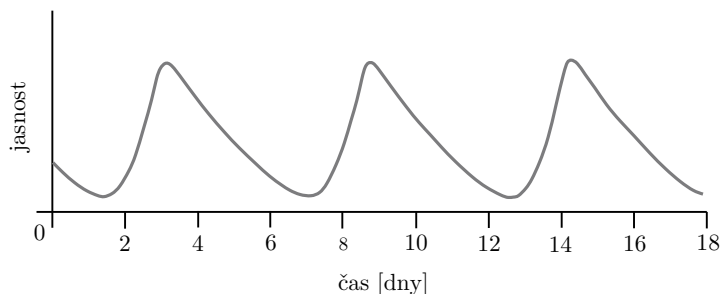
Obrázek 3: Světelné křivky tří typů zákrytových dvojhvězd

proto probíhá smršťování pomaleji než rozpínání. Výsledkem je tedy křivka „zkosená směrem doleva“. Jelikož výkon záření cefeidy závisí hlavně na její periodě, můžeme ze znalosti periody a jasnosti cefeidy vypočítat její vzdálenost od Země (kde opět používáme nějakých srovnávacích hvězd – dalších cefeid, jejichž vzdálenost jsme mohli ověřit jinou metodou měření, a tak onu závislost výkonu na periodě objevit). Proto jsou cefeidy velmi důležité při měření vzdáleností ve vesmíru.³

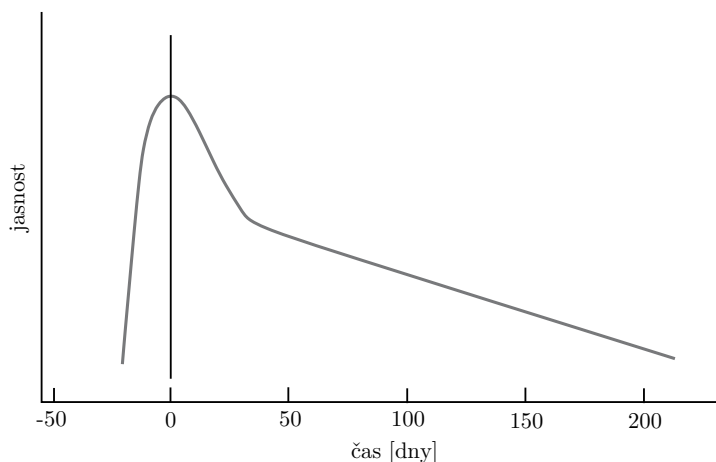
Na obrázku 5 je světelná křivka úkazu, kterému se říká supernova. Supernova vzniká, pokud hvězda dosáhne určité mezní hmotnosti, tlak záření již nemůže vyrovnávat gravitaci a hvězda se zhroutí sama do sebe. Rozlišujeme několik typů supernov, protože k nim dochází různým způsobem. K supernovám typu I dochází v důsledku přetoku hmoty z jedné hvězdy na bílého trpaslíka, což je vyhořelé jádro menší hvězdy. Supernovy typu II jsou závěrem života velmi hmotných samostatně existujících hvězd. V případě na obrázku 5 (tedy typ Ia) vznikla supernova kvůli přetoku hmoty z rudého obra na bílého trpaslíka, který tak zvyšoval svou hmotnost až po Chandrasekharovu mez, což je 1,44násobek hmotnosti Slunce, kdy se zhroutil a explodoval.

Zvláštní a celkem nedávný případ byl výrazný pokles jasnosti hvězdy Betelgeuse ze souhvězdí Orionu. Lze vidět, že minimum nastalo na začátku února roku 2020. Jedná se o červeného

³Například Edwin Hubble pomocí cefeid určil vzdálenosti cizích galaxií, z čehož potom mohl přibližně vypočítat rychlost rozpínání vesmíru, kterou dnes označujeme jako Hubbleovu konstantu. Vyšel mu však zhruba desetinásobek dnešní hodnoty, jelikož typ cefeid, které pozoroval, nebyl shodný s tím, se kterým počítal.



Obrázek 4: Světelná křivka cefeidy

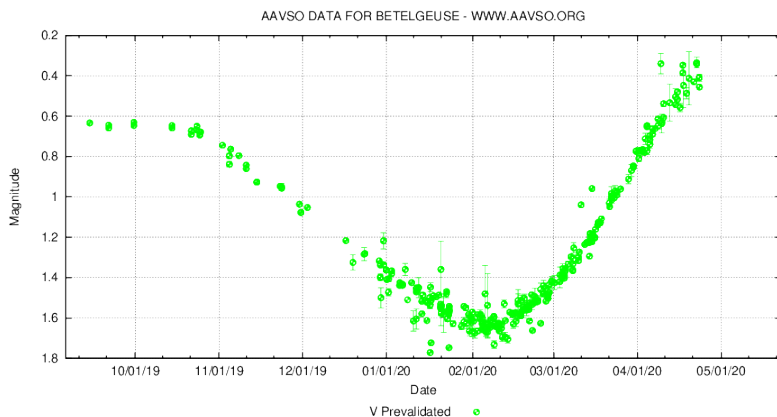


Obrázek 5: Světelná křivka supernovy typu Ia

veleobra, gigantickou hvězdou na konci svého života s poloměrem asi tisíckrát větším, než je poloměr Slunce, která by měla v astronomickém měřítku za velmi krátkou dobu explodovat v supernovu. Mnozí astronomové se tehdy domnívali, že právě tento pokles jasnosti představuje gravitační zhroucení hvězdy. Nejpravděpodobnějším vysvětlením je však zastínění Betelgeuse prachovým oblakem, nikoli gravitační kolaps.

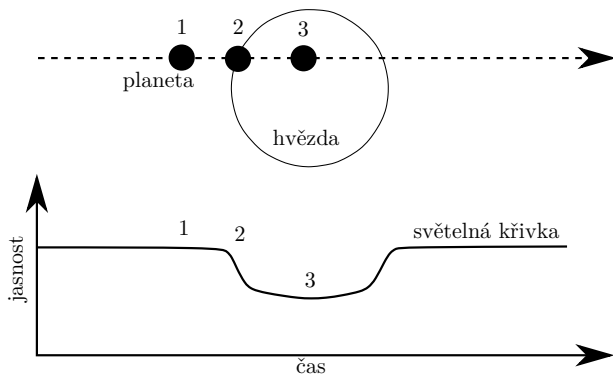
Exoplanety

Jak nejspíš víte, Slunce rozhodně není jediná hvězda, okolo níž obíhají planety. Planetám mimo Sluneční soustavu říkáme *exoplanety*. Pokud je rovina oběhu exoplanety ve správném úhlu vůči směru k Zemi, můžeme pozorovat mírné poklesy jasnosti hvězdy v důsledku překrytí exoplanetou. Z těchto poklesů pak umíme vypočítat poloměr, periodu i vzdálenost exoplanety od hvězdy. Z měření spektra soustavy pak ještě můžeme určit hmotnost planety a složení její atmosféry. Z těchto údajů posuzujeme například to, zda by se na exoplanetě mohl nacházet život. V drtivé



Obrázek 6: Světelná křivka hvězdy Betelgeuse na přelomu let 2019 a 2020 (převzato z <https://www.aavso.org/lcg>)

většině případů se však jedná o plynné obry obíhající velmi blízko mateřské hvězdě, tzv. „horké Jupitery“.

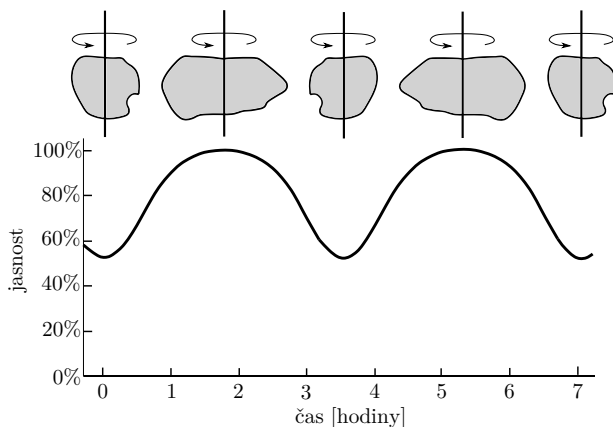


Obrázek 7: Světelná křivka tranzitu exoplanety

Čím blíž je exoplaneta ke hvězdě z pohledu Země, tím je minimum širší a placatější. Pokud bychom sledovali křivku po celou fázi exoplanety, našli bychom ještě sekundární minimum, avšak o mnoho méně výraznější. Mezi primárním a sekundárním minimem jasnost systému mírně narůstá, mezi sekundárním a primárním naopak klesá. Exoplaneta totiž odráží světlo hvězdy, a tím, jak okolo ní obíhá, se část osvětleného povrchu viditelná ze Země mění (stejně jako Měsíc střídá fáze od novu přes první čtvrt po úplňk a zase zpět přes poslední čtvrt). Pokud je však exoplaneta „v úplňku“, je zakryta hvězdou, a proto nastává sekundární minimum.

Planetky

Dalšími objekty, k jejichž výzkumu fotometrie výrazně přispívá, jsou planetky. Největší koncentrace planetek ve Sluneční soustavě je na oběžné dráze mezi Marsem a Jupiterem. Tomuto uskupení říkáme „hlavní pás planetek“. Pravděpodobně vznikl rozpadem planety při formování Sluneční soustavy. Jelikož jsou i relativně blízko Země, pozorujeme je ve srovnání například s transneptunickými tělesy snadno.



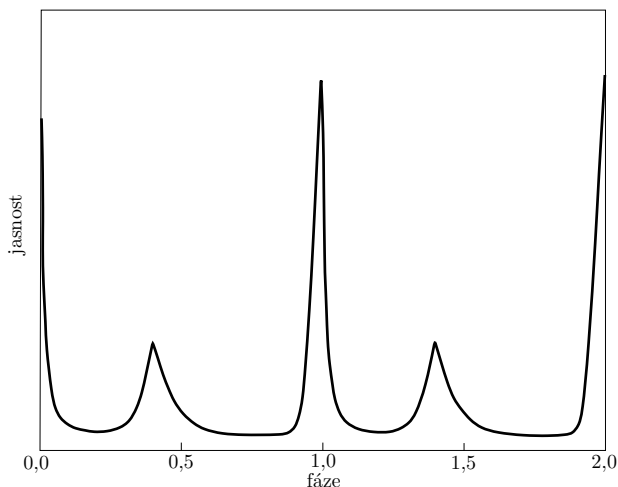
Obrázek 8: Světelná křivka planety

Jelikož planetky mají na rozdíl od planet nebo hvězd velmi nepravidelný tvar a k tomu relativně rychle rotují, plocha osvětlená Sluncem se s časem mění. Tyto změny se potom odráží i na jasnosti planety, a získáváme tak většinou mírně nepravidelnou světelnou křivku (minimum může být i více než dvě). Z těchto změn pak můžeme určit tvar a periodu rotace planety.

Pulsary

Pulsary jsou velmi rychle rotující neutronové hvězdy o velikosti pouhé desítky kilometrů, vysílající elektromagnetické záření ze dvou pólů, nikoli pólů rotace, ale z magnetických pólů. Kvůli rotaci se tedy Země může na chvíli dostat do sloupce záření, což má za následek zvětšení jasnosti (většinou jsou měřeny v jiných částech spektra než v tom viditelném). Jelikož pulsary rotují opravdu velmi rychle, měli astronomové při detekování prvního pulsaru za to, že se jedná o signál vyslaný mimozemšťany, a pojmenovali jej LGM-1 jako zkratka „little green men“. Mimochodem první planetární systém mimo Sluneční soustavu byl objeven nikoli u klasické hvězdy, ale právě u pulsaru. Byl objeven pomocí malých odchylek v periodě rotace pulsaru v důsledku gravitačního působení exoplanet.

Na obrázku 9 lze vidět účinek záření vycházejícího z obou pólů. Za vyšší primární maximum může světlo z pólu blíže směrem k Zemi, za nižší sekundární maximum může druhý pól. Celá perioda rotace pulsaru, tedy od jednoho primárního maxima do druhého, se u známých pulsarů pohybuje od 0,001 4 s do 8,51 s.



Obrázek 9: Světelná křivka pravidelného pulsaru

Závěr

Doufáme, že jste se v tomto Výfučení dozvěděli nové poznatky o astronomických objektech a jedné z důležitých metod dnešních astronomů. Fotometrie je totiž zásadní částí astronomického pozorování. Kdyby si starší z vás chtěli opravdová fotometrická pozorování vyzkoušet, můžete se zúčastnit letní Astronomické expedice.⁴ S jakýmkoli dotazy k Výfučení se neváhejte zeptat autorů.

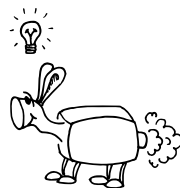
Tomáš Patsch
patscht@vyfuk.org

Marco Souza de Joode
marco@vyfuk.org

⁴<https://astronomickaexpedice.cz/>



Řešení II. série

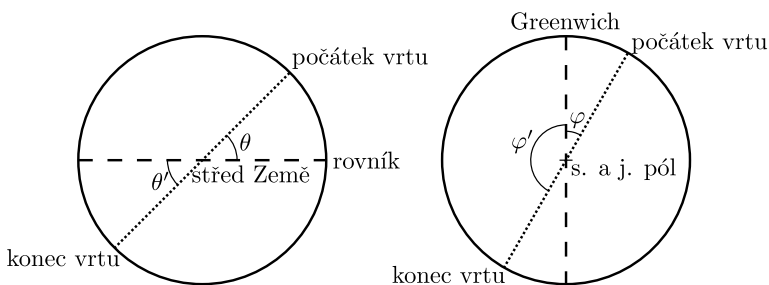


Úloha II.1 ... Vrt

5 bodů; průměr 4,17; řešilo 6 studentů

Už vás někdy napadlo, co leží pod Českem – přesně na druhé straně Země? Představme si vrt vedený z České republiky přes střed Země na druhou stranu. Jaké zeměpisné souřadnice bude mít bod na konci vrtu a jak se nazývají geografická místa poblíž onoho bodu? Předpokládejte, že vrt provádíme na zeměpisné šířce 50° s. š. a zeměpisné délce 15° v. d. Jak by se výsledek změnil, pokud byste začali kopat na souřadnicích svého bydliště?

Pro řešení si musíme Zemi vhodně nakreslit. Protože chceme řešit příklad pro dvojce různé souřadnice, označme si obecně zeměpisnou šířku θ a zeměpisnou délku φ . Budeme hledat θ' a φ' , tedy souřadnice „na druhé straně Země“.



Zkusme určit zeměpisnou šířku druhé strany. K tomu si nakreslíme průřez Země tak, aby póly byly nahoře a dole a na jejich spojnici ležel střed Země. Vrt symbolizujeme úsečkou, která vede přes střed Země a na druhé straně se protne se zemí. Chceme určit, jak velký je úhel θ' . Jelikož je však θ' vrcholový úhel vzhledem k θ , víme, že velikost θ' je stejná jako velikost θ .

Nyní musíme správně určit znaménko. Na severní polokouli je z. š. kladná, na jižní záporná. Pokud tak máme nějakou z. š. θ na začátku, na opačné straně Země bude vždy z. š. $\theta' = -\theta$.

Poté zkusíme určit zeměpisnou délku na druhé straně vrtu. K tomu si nakreslíme Zemi tak, že oba póly a střed Země splývají v jednom bodě ve středu. Greenwichský poledník (a vlastně jakýkoli) je tak přímka, která prochází středem a protíná kružnici ve dvou bodech.

Trik je v tom, že obvod kružnice si napasujeme tak, aby seděl na naší zeměpisnou šířku. Vrt symbolizujeme přímkou, která prochází středem. Chceme určit velikost úhlu φ' . Zeměpisnou délku měříme od Greenwiche a úhly φ a φ' jsou vedlejší, takže pro velikost φ' platí

$$\varphi' = 180^\circ - \varphi.$$

Zároveň víme, že pokud φ je východní délky, φ' bude západní délky a naopak, protože se nachází na opačné straně od Greenwiche.

Nakonec nám zbývá dosadit. Pro souřadnice $\theta = 50^\circ$ s. š. a $\varphi = 15^\circ$ v. d. vychází $\theta' = 50^\circ$ j. š. a $\varphi' = 165^\circ$ z. d., tedy někde v Tichém oceánu jihozápadně od Nového Zélandu nedaleko Auckland Island.

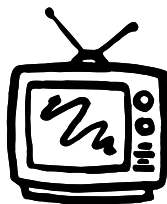
Obdobně pro budovu MFF UK, kde sídlí Výfuk, $\theta = 50,114\,72$ N (N značí s. š. ve stupních) a $\varphi = 14,449\,19$ E (E zase značí v. d.) vychází $\theta' = 50,114\,72^\circ$ j. š. a $\varphi' = 165,550\,81^\circ$ z. d., tedy také někde v Tichém oceánu.

Robert Gemrot
robert@vyfuk.org

Úloha II.2 ... Stará televize

5 bodů; průměr 3,67; řešilo 43 studentů

Organizátoři Výfuku se o prázdninách vydali k Viktorovi na chatu. Když tam dorazili, zaujala Kačku stará televize natolik, že se zamyslela nad tím, jak vlastně funguje. Obrazovka televize má rozměry $25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$ a zobrazuje obraz pomocí paprsku urychlených elektronů. Ty dopadají na povrch stínítka pokrytý luminoforem, který po dopadu elektronů vydává světlo. Předpokládejme, že obrazovka se rozdělí na 625 řádků, kterými potřebuje paprsek probíhat tak rychle, abychom viděli souvislý obraz, tedy aby paprsek tvořil 25 snímků za sekundu. Pomozte Kačce spočítat, jakou nejmenší rychlostí se mohl konec paprsku pohybovat po stínítku.



Nejprve určíme dráhu, kterou paprsek musí urazit, aby se vytvořil na obrazovce jeden snímek. Počet řádků vynásobíme délkou strany obrazovky v centimetrech:

$$d = 625 \cdot 25\text{ cm}$$

$$d = 15\,625\text{ cm}$$

Dále je třeba spočítat vzdálenost, kterou paprsek překonává mezi jednotlivými řádky. Jelikož hledáme nejmenší možný čas pro paprsek, vezmeme nejkratší možnou dráhu, tedy takovou, při které se paprsek nevrací pokaždé na začátek. Po dokončení jednoho řádku se pouze posune o kousek dolů. Tehdy urazí nejmenší celkovou vzdálenost, přibližně

$$d' = 25\text{ cm}.$$

Celkem tedy paprsek musí za jeden snímek urazit $15\,650\text{ cm}$. Víme, že paprsek má za 1 s vytvořit 25 snímků. Celkovou vzdálenost tedy vynásobíme pětadvaceti snímky, a tak dostaneme dráhu, kterou musí ukazatel ujet za jednu sekundu, aby vykreslil plynulý obraz.

$$s = 156,5\text{ m} \cdot 25$$

$$s \doteq 3\,900\text{ m}$$

Abychom viděli souvislý obraz, musí tuto dráhu paprsek urazit za 1 sekundu. Můžeme proto říci, že nejmenší rychlost, kterou se paprsek pohybuje po stínítku, je $v = 3\,900\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Poznámky k došlým řešením

V našem vzoráku jsme rychlost paprsku zaokrouhlili na stovky ($3\,900\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$). Vaše řešení se v řádu jednotek a desítek lišila. Výsledek samozřejmě záležel na tom, jestli jste počítali s tím,

že se paprsek posouvá také mezi jednotlivými řádky a snímky (paprsek urazí nějakou dráhu také ve vertikálním směru).

Ovšem způsobů řádkování je také více, nejmenší možnou vzdálenost urazí paprsek podle vzorového řešení (paprsek se pak pohybuje nejmenší možnou rychlostí). Někteří z vás uvažovali, že se paprsek vrací také zpět a urazí tedy za jeden snímek 50 cm ve svislém směru. Další řešení počítala s návratem paprsku po diagonále. Jiná dokonce uvažovala, že se paprsek pohybuje diagonálně také mezi jednotlivými řádky, což odpovídá reálnému řádkování dnešních televizorů. Všechny tyto možnosti vedly ke správnému řešení úlohy.

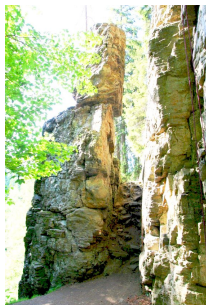
Julie Weisová

julca@vyfuk.org

Úloha II.3 ... Rozštípená skála

6 bodů; průměr 4,53; řešilo 32 studentů

Organizátoři Výfuku se vydali na krátký výlet po okolí Hamrů nad Sázavou. Jejich cílem se stala Rozštípená skála – skalní útvar, který podle pověsti vznikl s přispěním dábla. Jeho asistence spočívala v tom, že jednak uvolnil rulový skalní blok $10 \times 10 \times 2$ metry, jednak puklinu rozevřel až do šířky dva metry. Toto učinil pomocí neznámého množství dynamitu. 30 % uvolněné chemické energie bylo spotřebováno na oddělení skály, zbylých 70 % na posunutí odděleného bloku – dábel samozřejmě pracuje s dokonalou efektivitou. Odhadněte, kolik dynamitu použil, jestliže podloží kladlo pohybu bloku odpor 5 MN.



Obrázek 10: Část přírodní památky Rozštípená skála poblíž Hamrů nad Sázavou, části obce Žďár nad Sázavou. Autor fotografie: uživatel *pasatur* (Pavel Samuel) na webu Turistika.cz.

Nejdříve si můžeme všimnout, že se v zadání nacházejí některé nadbytečné údaje. Například známe-li odpor, který kladlo podloží pohybu bloku, pak nás jeho hmotnost ani rozměry už nezajímají. Podobná pozorování nám mohou řešení fyzikálních úloh značně zjednodušit a často má smysl se o ně na začátku pokusit.

Ze zadání víme, že na posunutí odděleného bloku bylo potřeba 70 % veškeré uvolněné energie E_0 , která současně odpovídá vykonané práci W . Tuto rovnost můžeme zapsat následující rovnici:

$$\frac{7}{10} E_0 = W.$$

Veškerou uvolněnou energii, kterou ďábel použil, si můžeme rozepsat jako součin hledané neznámé hmotnosti dynamitu m a jeho energetické hustoty⁵ η (řecké malé písmeno eta). Práce W odpovídá součinu odporové síly F a vzdálenosti s , kterou skalní blok během svého pohybu překonal. Po dosazení těchto veličin do předchozí rovnice si následnými úpravami už snadno vyjádříme přímo hledanou hmotnost dynamitu.

$$\frac{7}{10}m\eta = Fs$$

$$m = \frac{10}{7} \frac{Fs}{\eta}$$

Nakonec dosadíme konkrétní čísla ze zadání. Energetickou hustotu dynamitu jsme našli na internetu jako cca $5 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

$$m = \frac{10 \cdot 5 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot 2 \text{ m}}{7 \cdot 5 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}} \doteq 3 \text{ kg}$$

Ďábel tedy potřeboval přibližně 3 kg dynamitu, což odpovídá zhruba osmnácti standardním 190 g tyčinkám.

Viktor Materna
materna@vyfuk.org

Úloha II.4 ... Luborovi je zima

6 bodů; průměr 5,14; řešilo 36 studentů

Po návratu z výletu se organizátoři rozhodli, že se půjdou koupat. Lubor ale nemá rád studenou vodu a do zahradního bazénu, který měl teplotu 28°C , se mu příliš nechťelo. Proto si musel počkat do druhého dne, kdy se bazén během dne díky průhlednému zakrytí ohřál o 2°C . Kolik hodin muselo nejméně svítit, jestliže právě polovina sluneční energie dopadající na průhledný kryt o povrchu 6 m^2 byla využita k ohřevu vody v bazénu? Výsledek srovnej s časem, za který by bazén ohřálo tepelné čerpadlo s výkonem 4 kW. Nakonec můžeme prozradit, že bazén obsahoval 8 m^3 vody a ostatní potřebné hodnoty je třeba dohledat.



Nejdříve si uvědomíme, jakým způsobem ohřívá Slunce bazén. Záření pocházející ze Slunce se postupně rozptyluje, dokud nedorazí na Zemi, kde působí hustotou zářivého toku $I = 1361 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Tato veličina určuje, jaký výkon dopadá na 1 m^2 , a nazývá se sluneční (nebo také solární) konstanta, přestože se v průběhu roku částečně mění. Má-li bazén plochu $S = 6 \text{ m}^2$, bude dopadající výkon $P_S = SI\eta = 4083 \text{ W}$, kde $\eta = 0,5$ je účinnost výkonu přes plachtu ze zadání.

Chceme-li ohřát bazén o $\Delta T = 2^\circ\text{C}$, budeme muset vodě dodat teplo $Q = mc\Delta T = V\rho c\Delta T$, kde $c = 4180 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ je měrná tepelná kapacita vody, $\rho = 997 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ hustota vody a $V =$

⁵Energetická hustota je míra výbušnosti dynamitu. Uvolní-li dynamit o hmotnosti 1 kg energii 1 J, má energetickou hustotu $1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$.

$= 8 \text{ m}^3$ její objem. Teď stačí dopočítat čas t , za který se bazén ohřeje o ΔT , pomocí rovnice, kde teplo dodané Sluncem se rovná teplu přijatému bazénem.

$$t_S \cdot P_S = V \rho c \Delta T$$

$$t_S = \frac{V \rho c \Delta T}{S I \eta}$$

$$t_S = \frac{8 \cdot 997 \cdot 4180 \cdot 2}{1361 \cdot 6 \cdot 0,5} \text{ s} \doteq 16330 \text{ s} \doteq 4,54 \text{ h}$$

Lubor si bude muset počkat 4,5 hodiny než bude teplota vody podle jeho přání. Pokud bychom použili tepelné čerpadlo o výkonu $P = 4 \text{ kW}$, ohřála by se voda za čas

$$t = \frac{V \rho c \Delta T}{P} = \frac{8 \cdot 997 \cdot 4180 \cdot 2}{4000} \text{ s} \doteq 16670 \text{ s} \doteq 4,63 \text{ h}.$$

Tepelnému čerpadlu bude trvat ohřát bazén zhruba o 6 minut déle oproti slunečnímu záření. Pokud by si ale chtěl Lubor čekání zkrátit, zkombinuje obě dvě možnosti.

Patrik Kašpárek
patrik@vyfuk.org

Úloha II.5 ... Výlet balónem

7 bodů; průměr 5,97; řešilo 36 studentů

Přátelé Výfuku se jali létat balónem. Avšak báli se, že uletí a dojde jim kyslík, a proto přivázali balón na pružinu, která byla pevně spojena se zemí, a začali kmitat. Nenatažená pružina měla délku $l_0 = 150 \text{ m}$ a nejvýše nad povrchem Země byli ve výšce $h = 160 \text{ m}$. Balón, naplněn vzduchem o hustotě $\rho = 0,90 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, měl objem $V = 2500 \text{ m}^3$. Hmotnost balónu a lidí v něm byla $m = 800 \text{ kg}$. Běžná hustota vzduchu za normálního tlaku a teploty je $\rho_0 = 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.



1. Jak velkou vztlačkovou silou byl balón nadnášen?
2. Jakou celkovou silou F balón natahuje pružinu, je-li ve výšce l_0 ?
3. Pokuste se určit tuhost použité pružiny. Napovíme vám, že pro tuhost pružiny k platí:

$$F = k \Delta l = k(l - l_0),$$

kde F je síla, která natahuje pružinu, l je délka natažené pružiny a l_0 je délka pružiny v klidu.

4. S jakou frekvencí balón kmitá? Pro frekvenci kmitavého pohybu platí:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kg}{F}},$$

přičemž k vyjadřuje tuhost pružiny, g tíhové zrychlení a F je síla natahující pružinu.

1. Z Archimédova zákona víme, že pro vztlakovou sílu platí

$$F_{vz} = V \rho_0 g ,$$

kde ρ_0 je hustota kapaliny, v našem případě vzduchu, ve kterém je těleso o objemu V ponořeno, a aby vše fungovalo, musí se ještě kapalina nacházet v tíhovém poli se zrychlením g . Po dosazení hodnot ze zadání do našeho vztahu pro vztlakovou sílu dostaneme, že její velikost je

$$F_{vz} = 31,6 \text{ kN} .$$

2. Na balón působí dvě síly – vztlaková a tíhová, navíc každá opačným směrem. Výslednice těchto sil tedy bude dána rozdílem jejich velikostí, přičemž velikost tíhové síly F_G ještě musíme určit. Víme, že hmotnost balónu a lidí je celkově m , nesmíme však zapomenout na vzduch uvnitř balónu, který vzhledem k obejmu balónu rozhodně není zanedbatelný. Celková hmotnost a tíhová síla působící na balón tedy je

$$M = m + \rho V ,$$

$$F_G = (m + \rho V) g .$$

Nyní už známe vše, co potřebujeme, proto můžeme spočítat celkovou sílu působící na balón ve výšce l_0 :

$$F = F_{vz} - F_G ,$$

$$F = Vg \left(\rho_0 - \rho - \frac{m}{V} \right) \doteq 1\,720 \text{ N} .$$

3. Ve výšce l_0 působí na náš balón pouze síla F . Jakmile však balón začne stoupat, pružina se bude natahovat a proti tomuto natažení začne působit silou

$$F' = k \Delta l .$$

Tato síla v průběhu stoupání balónu bezpochyby roste a v okamžiku, kdy bude balón zrovna ve výšce h , se velikost síly F' vyrovná s F a balón dosáhne rovnovážné polohy. Z této rovnováhy můžeme spočítat tuhost pružiny k jako

$$F = k(h - l_0) ,$$

$$k = \frac{Vg}{h - l_0} \cdot \left(\rho_0 - \rho - \frac{m}{V} \right) = 172 \text{ N} \cdot \text{m} .$$

4. Abychom mohli použít vzorec ze zadání, musíme se zamyslet nad tím, jaká síla natahuje pružinu. V předchozím úkolu jsme řekli, že v nové výšce h se balón ustálí v rovnováze. To je vskutku tak, neboť součet tíhové síly, síly pružiny a vztlakové síly je roven nule. Pružina se tedy nachází v nové rovnovážné poloze h .

Pohyb pružiny tedy ovlivňuje jen setrvačná hmotnost balónu $F_G/g = m$. Frekvence je tak rovna

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + \rho V}} = 0,0378 \text{ Hz} .$$

Úloha II.E ... U-rampa

7 bodů; průměr 4,30; řešilo 27 studentů

Organizátoři Výfuku se rozhodli, že si zajdou na minigolf. Při hraní si všimli, že na různé dráhy se hodí různé vlastnosti míčku a že záleží na tom, jak se k jamce odpálí.

Zkuste si i vy v různých případech prozkoumat chování materiálu. Zkonstruuje si doma U-rampu ve tvaru půlkruhu s **minimální** výškou 10 cm (například z kartonu a drátků nebo ohnuté matrace). Poté si sežeňte několik malých kuliček z různých materiálů (například hopík, železnou kuličku či kuličku od myši) a pouštějte je z vrcholu rampy. Změřte, do jaké výšky jsou schopné kuličky na druhé straně rampy vyjet. Se stejnými míčky pak změřte i to, jak vysoko se odrazí, když je pustíte na zem ze stejné výšky, z jaké jste je pouštěli na U-rampě.

Porovnejte ztrátu energie při průjezdu rampou a při odrazu pro vaše kuličky. Ztrátu energie můžete popsat vydělením výsledné potenciální energie energií počáteční. V případě pádu podíl nazýváme koeficient restituce (neboli účinnost). Čím jsou rozdíly ve ztrátě energie způsobeny? Nezapomeňte, že čím vyšší dráhu zvolíte, tím přesnější výsledky obdržíte.

Teorie

Když takto vypouštíme kuličku, neočekáváme, že se dostane do výšky, ze které byla vypuštěna, nýbrž trochu níž, poté se zastaví a dokutálí zpět. Kdybychom se na problém dívali teoreticky, ze zákona zachování energie bychom došli k závěru, že kulička by se měla donekonečna kutálet ze strany na stranu a vždy se otočit ve výšce vypuštění. Toto vysvětlení nepopisuje realitu dobře, ale to neznamená, že by zákon zachování energie neplatil.

Ve skutečnosti totiž při pohybu kulička energii ztrácí. Většinou se jedná o ztrátu přes odpadní teplo, které vzniká působením tření, ale může jít třeba i o zvuk či deformaci kuličky a její podložky. Je to právě ta energie, kterou mají na svědomí třecí síly, odpor prostředí a mnohé další okolnosti, které obvykle na konci úloh najdeme ve výčtu faktorů, které je možno zanedbat⁶. V případě kutálení po U-rampě musíme tuto ztrátu připisovat především valivému odporu, tření či odporu vzduchu. U pádu míčku pak ztrátu energie popisuje již zmíněný koeficient restituce, který je vlastní každé konfiguraci, materiálu a kuličce.

Jak tedy vypočítat tuto ztrátu, když známe výšku vypuštění h a výšku, do které se těleso dostane po průjezdu U-rampou, h_1 ? Když zvolíme nulovou hladinu potenciální energie v nejnižším bodě, bude energie kuličky při vypuštění

$$E = mgh.$$

Obdobně můžeme najít i energii kuličky po průjezdu U-rampou (po opětovném výstupu), je to

$$E_1 = mgh_1.$$

Jelikož chceme zjistit, jaká část původní energie E se nezměnila na jiné formy, podělíme energii E_1 energií E . Nazvěme si tento podíl řeckým písmenem η (éta). Pak máme

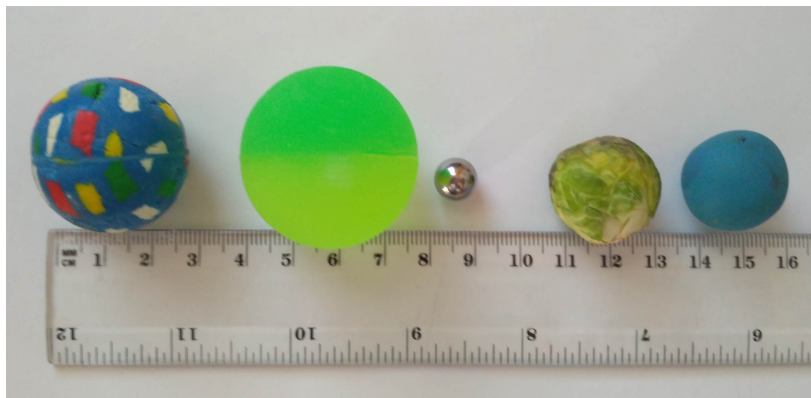
$$\eta = \frac{E_1}{E} = \frac{mgh_1}{mgh} = \frac{h_1}{h}.$$

Vidíme, že tento podíl η , který v případě pádu odpovídá koeficientu restituce k , je bezrozměrný a zjistíme ho jako podíl výšek, do kterých se kulička dostala.

⁶Tím však nechceme říct, že takové zanedbávání je špatné, právě naopak, bez něj bychom mnohdy nebyli schopni vůbec dojít k výsledku; navíc rozumné zjednodušení obvykle nevede k velkému rozporu s praxí.

Měření

Naše U-rampa byla vytvořena z tvrdého papíru a měla výšku $h = (30,0 \pm 0,3)$ cm, ze které také byla vypouštěna všechna tělesa. K měření jsme vybrali, jak můžeme vidět na obrázku, dva různé hopíky, kovovou kuličku, růžičkovou kapustu a kuličku z plastelíny.



Obrázek 11: Předměty vybrané pro experiment

Každý předmět byl 10krát vypuštěn z U-rampy a následně 10krát volným pádem puštěn k zemi a byla změřena výška, do které se dostal. Tato výška byla určena analýzou videozáznamu programem *Tracker*.⁷ U každého předmětu pak byla vypočtena průměrná výška a odchylka, která je určena jako směrodatná odchylka z naměřených výšek. Hodnoty jsou shrnuty v tabulce níže.

předmět	h_1 na U-rampě	odchylka	h_1 po odrazu	odchylka
	cm	cm	cm	cm
hopík 1	21,9	0,4	22,0	0,3
hopík 2	22,3	0,4	28,7	0,3
kovová kul.	20,5	0,2	6,8	0,3
kapusta	16,6	0,6	7,5	0,6
plastelínová kul.	19,6	0,4	0,0	0,0

Tabulka 1: Výsledky měření při vypouštění z výšky $h = (30 \pm 0,3)$ cm po U-rampě, respektive volným pádem.

Z těchto hodnot si již můžeme podle vzorce odvozeného v teoretické části vypočítat η , respektive k , a jejich odchylky.⁸ Tyto konečné výsledky najdeme ve druhé tabulce.

⁷<https://physlets.org/tracker/>

⁸Příslušný vzorec najdeme například na stránce https://vyfuk.mff.cuni.cz/rady_a_tipy/hokus_pokus.

předmět	$\frac{\eta}{\%}$	$\frac{\text{odchylka}}{\%}$	$\frac{k}{\%}$	$\frac{\text{odchylka}}{\%}$
hopík 1	73,0	2,1	73,3	1,8
hopík 2	74,3	1,8	95,7	2,0
kovová kul.	68,3	1,4	22,7	0,9
kapusta	55,3	2,6	25,0	2,0
plastelínová kul.	65,3	2,0	0,0	–

Tabulka 2: Vypočtené hodnoty poměru η a koeficientu restituce k vyjádřené v procentech spolu s odchylkami. Odchylky jsou vyjádřeny v procentních bodech, nikoliv jako část z pravděpodobné hodnoty.

Diskuze

K nepřesnostem našeho měření přispěly především chyby při měření výšek, ale také nedokonalost U-Rampy, která sice měla přibližně půlkruhový tvar, rozhodně však ne přesný. Také, zejména při průjezdu těžších předmětů, mohlo docházet k mírné deformaci U-rampy, která rozhodně výslednou výšku ovlivní. I přes to se nám podařilo změřit požadované hodnoty s relativní přesností pod 4 %, kromě kapusty, která však významně ovlivňuje přesnost svým nepříliš pravidelným tvarem. Zde dosahuje relativní nejistota i hodnoty 8 %.

Závěr

Měřením výšek, do kterých vyjedou kuličky po U-rampě, případně vyletí po odrazu, jsme změřili ztráty energie, respektive koeficient restituce, pro různé materiály. Když se podíváme na hodnoty na U-rampě, vidíme, že se pohybují v rozmezí 20 procentních bodů, zatímco hodnoty koeficientu restituce k máme od nuly až po bezmála 96 %. Hodnota η závisí především na tvaru a povrchu jednotlivých těles, proto máme nejnižší hodnotu pro velmi drsnou a nepravidelnou kapustu. Naopak hodnoty koeficientu restituce jsou spjaté především s materiálem, ze kterého je daný předmět vyroben. Pro hopíky, u kterých je co největší hodnota k vyžadována, mohou být velmi blízko stu procentům. Hopíky jsou také jediné předměty, pro které je $k > \eta$, tedy je výhodnější je pouštět volným pádem než po U-rampě. S tvrdšími materiály, jakým je třeba kapusta či kovová kulička, se koeficient restituce snižuje, až se u plastelíny dostane na nulu – ta totiž veškerou energii spotřebuje na svou nevratnou deformaci.

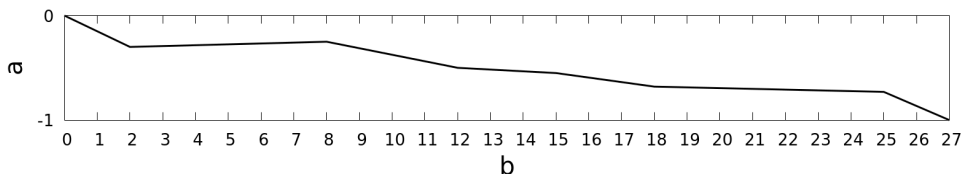
Lukáš Linhart

lukasl@vyfuk.org

Úloha II.V ... Mezi ploty

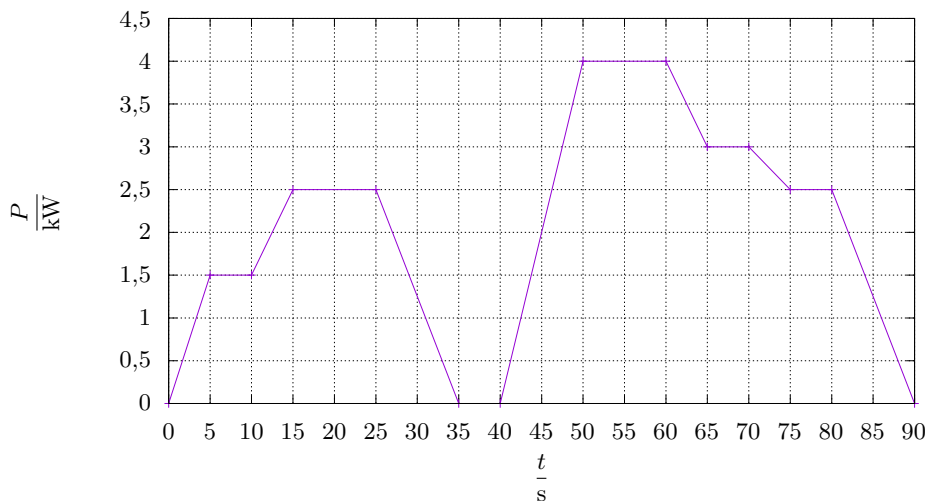
7 bodů; průměr 4,44; řešilo 32 studentů

1. Na přiloženém grafu na obr. 12 si můžeme demonstrovat, jak je důležité, aby údaje v něm byly čitelné. Odstranili jsme souřadnicovou mřížku a zvolili nevhodné měřítko a značení os. Určete graficky, jaká byla hodnota veličiny b pro hodnotu závislé veličiny $a = -0,7$.



Obrázek 12: Dobře čitelný graf

2. V dalším grafu na obr. 13 si můžete prohlédnout časový průběh elektrického výkonu navijáku, kterým jeřábík na staveništi zvedal betonový panel o hmotnosti $m = 1\,000\text{ kg}$ při tíhovém zrychlení $g = 9,8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Do jaké výšky jej zvednul? Nápoděda: Elektrická práce je definována jako součin dvou veličin stejně jako dráha v kinematice. Můžeme s ní tedy pracovat obdobně, pomůže nám rozměrová analýza.



Obrázek 13: Průběh odebíraného výkonu navijáku v čase

3. Zaznamenejte si v průběhu jednoho týdne, kolik hodin či minut jste strávili každý den nějakou častou činností dle vašeho výběru – prací do školy, díváním se na televizi, používáním mobilu, kontaktem s kamarády, nebo čímkoli jiným. Vytvořte závislost stráveného času na kalendářním datu, ale graf nekreslete. Naopak vytvořte jej v alespoň jednom počítačovém systému zmíněném ve Výfučení. Systém si můžete vybrat sami a nezapomeňte

na to, aby byl graf čitelný a měl všechny náležitosti. Můžete jej připojit jako obrázek do PDF či vytisknout k řešení zasílanému poštou a napsat, který program jste zvolili.

1. Pro změření složky x hodnoty $-0,7$ musíme nejdříve změřit celý graf. V našem případě vytištěného zadání jsme naměřili na ose y vzdálenost pro jeden dílek $1,4$ cm. Proto musíme najít místo, kdy je graf vzdálen od nuly přesně $1,4 \text{ cm} \cdot |-0,7| = 0,98 \text{ cm}$. V tomto místě vytvoříme kolmici na osu x a zjišťujeme, že se nám protne v hodnotě $20,8$.

Hodnota veličiny b pro veličinu $a = -0,7$ by tak byla $b = 20,8$.

2. Výšku, do které bude panel vytážen, můžeme odvodit z potenciální energie, kterou panelu dodáme.

$$E = mgh \Rightarrow h = \frac{E}{mg}$$

Abychom ji ovšem byli schopni spočítat, musíme znát onu energii, kterou panelu dodáme. Ta je rovna elektrické práci jeřábu. Tato práce je dle nápovědy rovna součinu příkonu P a času t :

$$E = Pt.$$

Elektrický výkon ovšem není konstantní a máme ho vyjádřený v grafu 13. Můžeme ovšem říct, že elektrický výkon je roven obsahu pod křivkou výkonu, protože máme graf v závislosti na čase, kterým výkon násobíme.

Pro spočítání plochy si graf výkonu rozdělíme na primitivní geometrické tvary (trojúhelníky a obdélníky), u kterých jsme schopni jednotlivě vypočítat jejich obsah. Příklad takového rozdělení můžeme vidět v grafu 14. Všechny obsahy těchto tvarů následně sečteme a dostaneme celkovou plochu.

Při sčítání začneme s prvním trojúhelníkem. Jeho základna jde z bodu $t = 0 \text{ s}$ do $t = 5 \text{ s}$. To znamená, že délka jedné strany je 5 s . Druhá strana se tyčí z hodnoty $P = 0 \text{ kW}$ do $P = 1,5 \text{ kW}$, takže strana má délku $1,5 \text{ kW}$. Pro trojúhelník známe vzorec pro plochu $ab/2$, do kterého dosadíme a získáme tím obsah prvního tvaru.

$$\frac{5 \text{ s} \cdot 1,5 \text{ kW}}{2} = 3,75 \text{ kJ}$$

Pokud tímto způsobem projdeme všechny tvary, dostaneme rovnici

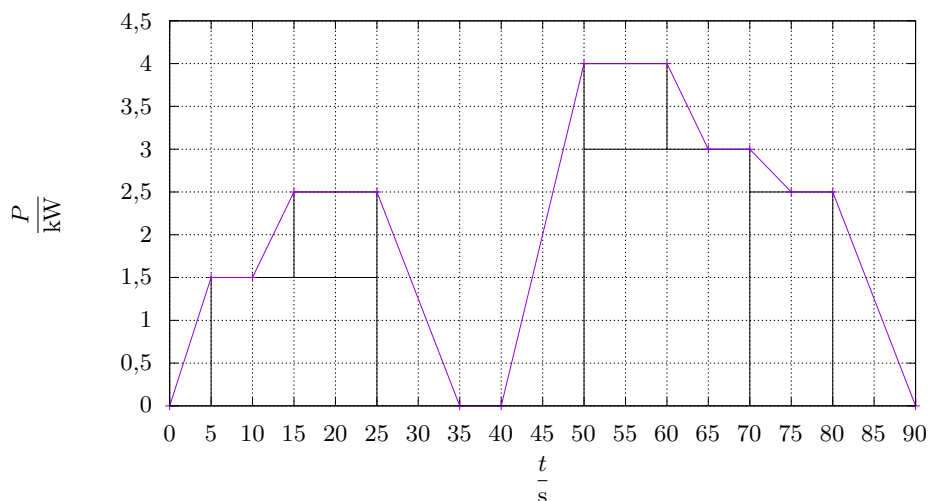
$$E = \left(\frac{5 \cdot 1,5}{2} + 20 \cdot 1,5 + \frac{5 \cdot 1}{2} + 10 \cdot 1 + \frac{10 \cdot 2,5}{2} + \frac{10 \cdot 4}{2} + 20 \cdot 3 + 10 \cdot 1 + \frac{5 \cdot 1}{2} + 10 \cdot 2,5 + \frac{5 \cdot 0,5}{2} + \frac{10 \cdot 2,5}{2} \right) \text{ kJ},$$

$$E = 190 \text{ kJ}.$$

Protože teď již známe energii, která je betonovému panelu dodána, můžeme vypočítat výšku, do které jej zvedneme.

$$h = \frac{E}{mg} = \frac{190 \cdot 10^3 \text{ J}}{1\,000 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} \doteq 19 \text{ m}$$

Betonový blok bude vyzdvížen přibližně do výšky 19 m .



Obrázek 14: Průběh odebíraného výkonu navigáku v čase

3. Jako aktivitu, u které jsme měřili strávený čas, jsme si zvolili procvičování rychlosti psaní na stránce keybr.com. Ta samotná poskytuje statistiky stráveného času, které jsme použili.

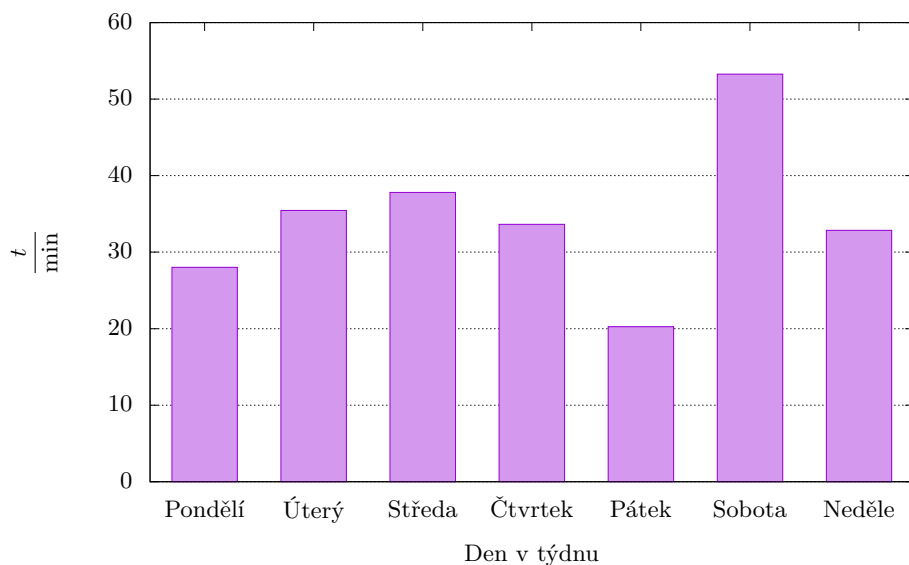
Data, která jsme měřili, v sobě nemají zakomponovanou žádnou přímou závislost. Nehledě na to, jaký je den, můžeme nad činností strávit libovolný čas. Proto tato data nesmíme kreslit spojitě, protože to by naznačovalo, že mezi datovými body se hodnoty postupně mění (což se neděje).

Vzhledem k tomu, že jsme získávali data během nějakého období, je nejvhodnějším vyobrazením sloupcový diagram. Teoreticky správné vyobrazení je i vykreslení jednotlivých bodů, ovšem nejedná se o tak přehledné zakreslení.

Na ose y by mělo být řečeno, že se jedná o čas a v jakých jednotkách tento čas uvádíme (v našem případě se jedná o minuty). Osa x neobsahuje přímé číselné hodnoty, nýbrž obsahuje dny v týdnu, proto také osu x adekvátně označíme.

Meze dat na ose x jsou jednoznačné, protože se jedná o jeden celý týden; budou se tam tedy nacházet pouze jednotlivé dny. Na ose y je ovšem jednodušší udělat chybu. Z grafu mimo jiné chceme vyčíst relativní rozdíly mezi jednotlivými dny. To jsme schopni validně udělat pouze v případě, kdy osa y začíná v hodnotě 0. Mohli bychom sice začít kreslit graf až od hodnoty 20, ovšem tím bychom zapříčinili, že záznam relativní velikosti záznamů by se změnil, a tím bychom celkovou představu o grafu zkreslili.

Pro přehlednost grafu taky můžeme přidat mřížku, která umožňuje jednodušší orientaci. Ta by ovšem neměla být příliš výrazná, aby nepřekážela samotným datům. Celkový výsledek vidíme na obrázku 15.



Obrázek 15: Čas strávený procvičováním v rámci jednoho týdne

Zdrojový gnuplotí soubor:

```
set xlabel "Den v týdnu"
set ylabel "t/min"
set xrange [-0.5:6.5]
set yrange [0:60]
set grid y
unset key
set boxwidth 0.6 relative
set style fill solid 0.4
plot "data.txt" using 0:2:xtic(1) with boxes
```

Soubor data.txt:

```
"Pondělí" 28.017
"Úterý" 35.45
"Středa" 37.8
"Čtvrtek" 33.63
"Pátek" 20.25
"Sobota" 53.27
"Neděle" 32.85
```

Samotný graf jsme vykreslili pomocí programu *gnuplot*. Využili jsme v něm možnosti nastavení příkazu `plot` na `boxes`. Pomocí `xrange` a `yrange` jsme určili rozmezí grafu a `xlabel` a `ylabel` byly použity pro specifikaci popisků os. Příkaz `set grid y` přidal mřížku pro osu *y*. Ostatní příkazy byly použity pouze na estetickou úpravu.

Adam Krška
adam@vyfuk.org



Pořadí řešitelů po II. sérii

Kategorie šestých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
		5	5	6	6	7	7	7	43	86
1. Alžběta Sochorová	G, Blovice	4	–	–	–	–	2	–	6	11
2.–6. Julie Krčmařová	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	5
2.–6. Naděžda Nečadová	Základní škola nám. Curieových P	–	–	–	–	–	–	–	–	5
2.–6. Václav Prachař	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	–	5
2.–6. Anežka Prachařová	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	–	5
2.–6. Kamila Vaníčková	ZŠ Na Šutce, Praha 8 - Troja	–	–	–	–	–	–	–	–	5

Kategorie sedmých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
		5	5	6	6	7	7	7	43	86
1. Kamilo Tomáš	G Jana Keplera, Praha	5	5	6	6	7	5	3	37	75
2. Vojtěch Černý	G Jana Keplera, Praha	5	5	6	4	7	5	5	37	74
3. Kosma Šatánek	ZŠ a MŠ Telecí	3	3	2	6	7	5	5	31	68
4. Klára Souza de Joode	G Jana Keplera, Praha	5	3	–	–	7	–	3	18	33
5. Jan Novák	G, Písek	–	–	–	–	–	–	–	–	16
6. Nina Naxerová	G Jana Keplera, Praha	3	–	–	–	–	–	1	4	9

Kategorie osmých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	76
1.–3. Lada Srpová	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	6	6	7	4	6	34	72
1.–3. Stela Srpová	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	6	6	7	4	6	34	72
1.–3. Michal Stroff	G, Budějovická, Praha	–	5	6	6	7	7	7	38	72
4. Veronika Menšíková	Arcibiskupské G, Praha	–	3	3	4	7	6	6	29	64
5. Jiří Preč	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	4	6	6	6	5	4	31	63
6. Adam Pustka	G F. X. Šaldy, Liberec	–	3	6	6	7	5	6	33	61
7. Damian Šatánek	ZŠ a MŠ Telecí	–	3	2	6	7	5	7	30	60
8. Vojtěch Janáček	G F. X. Šaldy, Liberec	–	3	3	6	7	5	5	29	57
9. Michal Dobrovolný	G Masarykovo nám., Třebíč	–	3	2	–	6	2	2	15	36
10. Vojtěch Novosad	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	–	2	6	7	2	–	17	34
11.–12. Mark Joly	G, Havlíčkův Brod	–	5	–	3	–	4	–	12	32
11.–12. Ester Šlapotová	G Frýdecká, Český Těšín	–	–	–	–	–	–	–	–	32
13. Vít Novák	ZŠ Chyšky	–	3	–	5	5	–	1	14	29
14. Vojtěch Mišičko	G, Jateční, Ústí nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	–	27
15.–16. Jan Ševeček	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	3	–	6	5	–	–	14	26
15.–16. Jana Vestfálová	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	3	–	–	4	–	2	9	26
17. Adam Mikulič	G, Havlíčkův Brod	–	5	–	4	–	–	–	9	25
18. Lea Bumbálková	Mendelovo G, Opava	–	4	–	6	–	–	–	10	21
19. Ludmila Šírová	Mensa G, Praha 6	–	3	5	2	5	2	2	19	19
20. Nina Štefanovičová	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	16
21.–23. Šimon Mach	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	12

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	76
21.–23. <i>Bartoloměj Vaníček</i>	ZŠ Na Šutce, Praha 8 - Troja	–	–	–	–	–	–	–	–	12
21.–23. <i>Amelie Vítková</i>	G a SOŠP, Čáslav	–	1	1	1	1	–	1	5	12
24. <i>Kristýna Kábrtová</i>	G a SOŠ Havlíčkova, Úpice	–	–	–	–	–	–	–	–	9
25. <i>Tomáš Řehák</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	3	–	–	–	–	–	3	8
26.–27. <i>Patricie Labuťová</i>	G B. Němcové, HK	–	–	–	1	–	2	–	3	5
26.–27. <i>Alexander Spálený</i>	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	5
28. <i>Melánie Boušková</i>	G Pod Svatou horou, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	–	1

Kategorie devátých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	76
1. <i>Matyáš Matta</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	5	6	6	7	7	7	38	72
2. <i>Eduard Plic</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	5	6	6	7	5	5	34	71
3. <i>Magdalena Hybnerová</i>	G, Jateční, Ústí nad Labem	–	5	6	6	7	6	5	35	70
4. <i>Ivan Žemlička</i>	G Ústavní, Praha	–	3	6	6	7	5	5	32	67
5. <i>David Něnička</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	–	5	6	6	5	5	6	33	66
6.–7. <i>Adam Bretšnajder</i>	G Z. Wintra, Rakovník	–	3	6	6	7	4	5	31	63
6.–7. <i>Matouš Mišta</i>	G, Olomouc-Hejčín	–	4	6	6	5	7	5	33	63
8. <i>Anastasia Bredikhina</i>	G Jana Keplera, Praha	–	4	6	5	5	–	5	25	61
9. <i>Michal Sykáček</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	5	6	6	6	3	5	31	58
10. <i>Pavla Šimová</i>	G, Šumperk	–	3	6	6	5	–	4	24	57
11. <i>Lucie Kvitová</i>	G, Jeseník	–	3	6	6	5	–	4	24	54
12. <i>Patrik Kadlec</i>	První české G, Karlovy Vary	–	3	2	6	6	3	4	24	50
13.–14. <i>Jan Rous</i>	G J. Barranda, Beroun	–	5	4	3	5	–	–	17	48
13.–14. <i>Václav Verner</i>	PORG, Praha	–	3	2	5	7	1	4	22	48
15.–16. <i>Vojtěch Muller</i>	G Nad Kavalírkou, Praha	–	2	2	5	5	–	–	14	42
15.–16. <i>Jan Souchop</i>	G, Mikulov	–	5	3	3	6	–	6	23	42
17. <i>Dana Myškeríková</i>	G J. Barranda, Beroun	–	3	4	–	–	–	–	7	33
18.–19. <i>Yasmin Fazla</i>	G, nám. TGM, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	30
18.–19. <i>Jaroslava Zimřplová</i>	G, Havlíčkův Brod	–	3	–	6	–	–	–	9	30
20. <i>Vojtěch Beneš</i>	G J. Palacha, Mělník	–	–	–	–	–	–	–	–	29
21.–22. <i>Tomáš Musil</i>	G, Voděradská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	25
21.–22. <i>Jáchym Předota</i>	G Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	25
23. <i>Jan Havlík</i>	G J. Barranda, Beroun	–	–	–	–	–	–	–	–	23
24. <i>Eduard Frühauf</i>	G J. Barranda, Beroun	–	–	–	–	–	–	–	–	22
25. <i>Michal Friml</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	21
26.–27. <i>Jakub Škaloud</i>	G Opatov, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	20
26.–27. <i>Lucie Židková</i>	G Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	20
28. <i>Jakub Merta</i>	ZŠ Brno - Bystrc	–	3	–	–	–	–	–	3	18
29. <i>Jan Kroupa</i>	ZŠ T. G. Masaryka Klatovy IV	–	–	–	–	–	–	–	–	12
30. <i>Štěpán Berek</i>	ZŠ Dobrá	–	–	–	–	–	–	–	–	11
31. <i>Jindřich Urban</i>	ZŠ Divišov	–	–	–	–	–	–	–	–	10
32.–33. <i>Teo Bumbálek</i>	Mendelovo G, Opava	–	3	–	–	–	–	–	3	8
32.–33. <i>Klára Nabiová</i>	ZŠ Velké Březno	–	–	–	–	–	–	–	–	8
34. <i>Rebeka Heřmanová</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	7
35. <i>Jan Vacek</i>	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	5
36. <i>Robert Ernest</i>	G, Voděradská, Praha	–	3	–	–	–	–	–	3	3
37. <i>Matyáš Malát</i>	ZŠ T. G. Masaryka Klatovy IV	–	–	–	–	–	–	–	–	1



*Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8*

www: <https://vyfuk.org>
e-mail: vyfuk@vyfuk.org



/ksvyfuk



@ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.