Úloha V.4 ... 24hodinová šichta

3 body; průměr 2,35; řešilo 17 studentů

Spočtěte, kolik práce vykoná motor nástěnných hodin během jednoho dne. Hodiny mají ručičky o tvaru tenkých tyčí, minutová ručička má hmotnost m a délku l, hodinová hmotnost M a délku L.

Obě ručičky se pohybují spojitě. Při brzdění motor žádnou práci nekoná, ale energie se ztrácí. Vteřinovou ručičku hodiny nemají. *Marek obdivoval své hodiny*

V případě, že hodinové ručičky jsou poháněny zvlášť (jako by každá měla svůj vlastní motor), je situace velice jednoduchá. Cestou dolů (od 12 k 6) jdou ručičky samospádem a naopak musejí být brzděny, aby šly dostatečně pomalu. Zde tedy žádnou práci motor nekoná.

Rychlost ručiček zůstává celou dobu stejná, a tedy i jejich kinetická energie T. Cestou nahoru (od 6 k 12) musí motor ručičku zvedat, a tedy zvyšovat jejich polohovou energii V. Práce potřebná k jednomu zvednutí minutové ručičky mezi půlhodinou (6) a celou hodinou (12) je tedy rovna příslušnému rozdílu polohových energií. Polohová energie v homogenním tíhovém poli je $V_\mathrm{m} = mgh$, kde g je tíhové zrychlení a h výška těžiště minutové ručičky,[1] kterou budeme odčítat od osy hodin.[2] Poněvadž naše ručička je homogenní tyč, má těžiště ve svém středu. Bude-li ručička nahoře (celá hodina), výška jejího těžiště bude $h_\mathrm{00m} = l/2$, dole (půlhodina) bude výška $h_\mathrm{30m} = -l/2$. Rozdíl polohových energií

$$V_\mathrm{00m} - V_\mathrm{30m} = mgl/2 - mg(-l/2) = mgl = W_{\mathrm{m}\uparrow}$$

je tedy také práce, jež je potřeba k jednomu vynesení minutové ručičky. U hodinové ručičky dostaneme stejným postupem práci potřebnou k jednomu vynesení

$$W_{\mathrm{h}\uparrow} = MgL.$$

Za jeden den oběhne hodinová ručička ciferník dvakrát a minutová 24krát, při každém oběhu musí motor příslušnou ručičku jednou vynést zespoda nahoru. Celková práce, již musí během jednoho dne vykonat, je tak

$$W = 2MgL + 24mgl.$$

Poznámky k došlým řešením

Častou a zbytečnou chybou bylo chybné určení počtu otočení ručiček za den. Ne, hodinová ručička skutečně neoběhne ciferník 24krát denně a minutová jej neoběhne 1440krát.

Poněkud fundamentálnějších chyb se mnozí dopouštěli při počítání práce. Vzorec pro vykonanou práci

$$W = F \cdot s,$$

kde F je *velikost* síly působící na hmotný bod a s je dráha, na níž síla působí, platí pouze tehdy, pokud tato síla působí *ve směru pohybu* a její velikost se nemění. Pokud chceme spočítat práci, kterou působí síla, jež není rovnoběžná se směrem pohybu, musíme tuto sílu rozložit na rovnoběžnou a kolmou složku[3] a pro výpočet práce použít jenom složku rovnoběžnou.

[1] Rozmyslete si, proč je pro polohovou energii určující poloha těžiště a nezáleží na rozložení hmoty.

[2] V homogenním tíhovém poli (tj. takovém, že tíhové zrychlení g je všude stejné) neexistuje žádná „přirozená“ volba nulové hladiny (tj. místa, kde považujeme výšku h za nulovou, a tudíž je zde nulová i polohová energie V). Za místo s nulovou výškou můžeme zvolit například podlahu, hladinu oceánu nebo třeba osu hodin – a polohová energie bude záviset na tom, jakou nulovou hladinu si zvolíme. Důležité však je, že pro fyziku jsou důležité pouze *rozdíly* polohových energií, takže je jedno, kterou z těchto hladin si zvolíme, ale musíme ji mít při všech výpočtech stejnou.

[3] Rozkladu sil jsme se věnovali v seriálovém studijním textu ve 3. sérii.

Síla kolmá na směr pohybu nikdy žádnou práci nekoná.

Problém je v tom, že ačkoliv síla motoru působící na ručičku je stále stejná (musí kompenzovat tíhovou sílu – tedy míří vzhůru a její velikost je mg, resp. Mg pro minutovou, resp. hodinovou ručičku), směr pohybu se celou dobu mění, a tudíž se mění i složka síly rovnoběžná se směrem pohybu. A do výše uvedeného vzorce nemůžeme dosadit veličinu, která se stále mění. Tudíž je tento vzorec pro naše účely nepoužitelný.

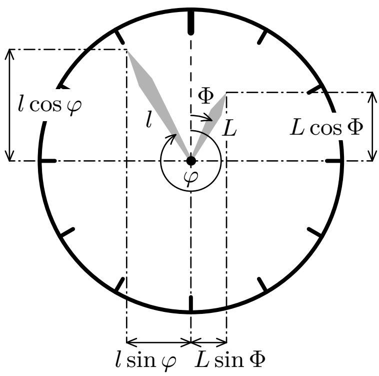
Spřevodovaný případ

Pro zajímavost si můžeme položit otázku, jak se výsledek bude lišit, když bude hodinová ručička s minutovou vzájemně spřevodovaná (jak to obvykle bývá, neboť jsou poháněny pouze jedním motorem). Podotýkáme, že k získání plného počtu bodů stačilo spočítat výše řešený nespřevodovaný případ.

Hřídel s hodinovou ručičkou a hřídel s minutovou ručičkou jsou na společné převodovce v převodovém poměru 1 : 12. To znamená, že na hřídel hodinové ručičky je přenášen dvanáctinásobek momentu síly z hřídele minutové ručičky a naopak, dvanáctina momentu síly z hřídele hodinové ručičky je přenášena na hřídel minutové ručičky.

Rozdílnost případu, kdy jsou obě ručičky spřaženy, od předchozího řešení tkví v tom, že ve chvíli, kdy jedna ručička jde směrem dolů a druhá nahoru, první zčásti či zcela pohání druhou. V případě nezávislých ručiček se veškerá energie cestou dolů ztratila při brzdění, takto se část z ní může přenést na druhou ručičku jdoucí nahoru, čímž se motoru část práce ušetří. Musíme tedy zjistit, kdy k tomuto vzájemnému pohánění dochází a kolik energie se tím ušetří.

Moment tíhové síly μ_{m} působící na minutovou ručičku vzhledem k ose hodin dostaneme jako součin vodorovné polohy těžiště ručičky od osy hodin a tíhové síly mg působící na ručičku. Vodorovná vzdálenost těžiště od osy určíme jako $(l/2)\sin\varphi$, kde φ je odchylka[4] inutové



Obr. 1: Počítání úhlů a kolmé průměty ručiček do svislého a vodorovného směru. Souřadnice poloh těžišť získám jako polovinu vyznačených průmětů v případě homogenních tyčí. Ručičky na obrázku mají jiný tvar – v takovém případě bychom nebrali polovinu, ale jiný podíl.

[4] Úhel zde (poněkud netradičně, avšak z pochopitelných důvodů) počítáme kladně po směru hodinových ručiček.

ručičky od svislého směru nahoru (tedy od dvanáctky). Máme tedy

$$\mu_\mathrm{m} = \frac{1}{2} mgl \sin\varphi .$$

Analogicky můžeme spočíst moment tíhové síly μ_h působící na hodinovou ručičku:

$$\mu_\mathrm{h} = \frac{1}{2} MgL \sin\Phi ,$$

kde Φ je odchylka hodinové ručičky od svislého směru nahoru.

Zaveďme konvenci, že o jedné půlnoci je $\varphi = \Phi = 0$ a úhel φ spojitě roste až do další půlnoci, kdy po 24 otočeních minutové ručičky bude $\varphi = 24 \cdot 360^\circ = 8640^\circ = 48\pi$ a obdobně po dvou otočeních hodinové ručičky $\Phi = 2 \cdot 360^\circ = 720^\circ = 4\pi$. Úhly si přirozeně můžeme vyjádřit jako funkce času:

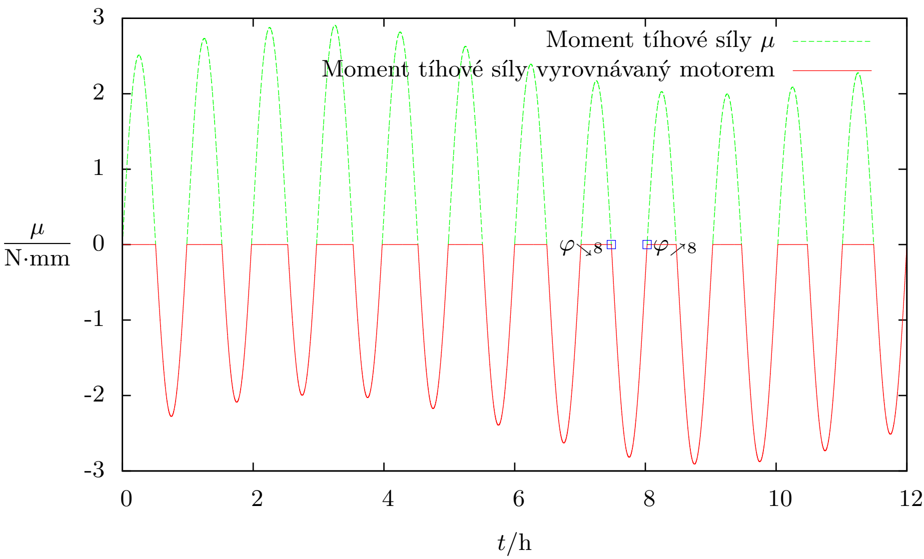
$$\varphi = \omega t = 2\pi/\mathrm{h}, \quad \Phi = \Omega t = \frac{1}{6}\pi/\mathrm{h}.$$

Zjevně platí, že $\varphi = 12\Phi$.

Moment tíhové síly působící na hřídel minutové ručičky je tedy

$$\mu = \mu_\mathrm{m} + \frac{1}{12}\mu_\mathrm{h} = \frac{1}{2} mgl \sin\varphi + \frac{1}{24} MgL \sin\left(\frac{\varphi}{12}\right),$$

přičemž v naší konvenci kladné μ znamená, že hodiny jdou samospádem, musejíce být brzděny.



Obr. 2: Příspěvek tíhy k momentu síly na hřídeli minutové ručičky v průběhu 12 hodin, $ml = 1125\,\mathrm{g \cdot mm}$, $ML = 500\,\mathrm{g \cdot mm}$.

Při záporném μ pracuje motor, aby celkový moment síly (μ od tíhy ručiček a $-\mu$ od motoru) byl nulový (a ručičky se tak pohybovaly stále stejně rychle).

Abychom určili celkovou motorem vykonanou práci, je nutné zjistit, ve kterých časových úsecích je motor zatížen (tj. spočítat doby, kdy je μ záporné) a jakou práci v těchto jednotlivých úsecích motor vykonal. První krok znamená vyřešit nerovnici $\mu < 0$, což znamená řešit rovnici $\mu = 0$. Tato goniometrická rovnice *není analyticky řešitelná* (kromě zjevného kořenu, kdy jsou obě ručičky na dvanáctce, $\varphi = 24k\pi$, k je celé číslo), můžeme ji řešit leda numericky na počítači.

Řešením této rovnice je až 24 kořenů během 12 hodin, tj. v intervalu úhlů $\varphi \in (0, 24\pi]$. Nebude-li hodinová ručička výrazně delší a těžší než minutová (což nebývá), bude jich právě 24 (v. obrázek 2; minutové ručičce přísluší 12 kmitů sinusoidy a hodinové přísluší jedna velká „vlna“ vychýlení této sinusoidy; velikost tohoto vychýlení je úměrná ML).

Z těchto 24 kořenů ve 12 případech přechází moment μ tíhové síly z kladných hodnot na záporné, ty si označme $\varphi_{\searrow n}$ a ve 12 naopak ze záporných hodnot na kladné, jež označme $\varphi_{\nearrow n}$, kde v obou případech n jde od 1 do 12 a znamená pořadí kořene daného typu od půlnoci.

V úseku mezi kořenem $\varphi_{\searrow n}$ a $\varphi_{\nearrow n}$ tedy motor koná práci. Práci vykonanou motorem v tomto úseku určíme rozdíl polohových energií na konci a na začátku. Polohovou energii v libovolném okamžiku určíme z polohy těžišť:

$$V(\varphi) = mg\frac{l}{2}\cos\varphi + Mg\frac{L}{2}\cos\frac{\varphi}{12},$$

v n. úseku tedy motor vykoná práci

$$W_n = V\left(\varphi_{\nearrow n}\right) - V\left(\varphi_{\searrow n}\right).$$

Sečtením práce ze všech těchto úseků a vynásobením dvěma (hodiny vykonají celý cyklus za den dvakrát) dostáváme konečný výsledek pro vykonanou práci[5]

$$W = 2\sum_{n=1}^{12} W_n = 2\sum_{n=1}^{12}\left(V\left(\varphi_{\nearrow n}\right) - V\left(\varphi_{\searrow n}\right)\right).$$

Marek Nečada
marekn@fykos.cz

[5] Symbol $\sum$ používáme tehdy, když máme ve výrazu hodně sčítanců a nechceme celý výraz rozepisovat. Konkrétně námi použité $\sum_{n=1}^{12}$ znamená „do výrazu za tímto symbolem dosadíme postupně za n všechna přirozená čísla od 1 do 12 a pak všechny takto vzniklé výrazy sečteme.“