Úloha V.2 ... Martin a Marťan

3 body; průměr 1,8; řešilo 25 studentů

Martin se houpe na houpačce tak, že ve chvíli, kdy je výchylka houpačky 90 stupňů, se houpačka zastaví a začne se vracet zpět. Na neznámé planetě daleko ve vesmíru se houpe Marťan, jenže tak, že se houpačka zastaví v největší výchylce 180 stupňů, tedy se téměř přetáčí. Jaký je poměr hmotnosti planety Země a planety, na které se houpe Marťan, víte-li, že Martin i Marťan mají stejnou hmotnost, houpačky jsou stejně dlouhé a rychlost houpaček v dolní úvrati (při průchodu rovnovážnou polohou) je stejná? *Terka Z. chodí ráda na dětské hřiště*

Martin i Marťan mají stejnou hmotnost a při svém houpání i stejnou rychlost v dolní úvrati. To znamená, že mají v dolní úvrati i stejnou kinetickou energii E_k,

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

Martin se zastaví s výchylkou 90°, Marťan s výchylkou 180° (podotkněme, že houpačky musejí být na tyči, nikoliv na řetězu, aby to bylo možné). Marťan tedy vystoupí do dvojnásobné výšky než Martin, označme ji $2h$. Při vyhoupnutí vzhůru se kinetická energie mění na potenciální a v bodě, kde se houpačka zastaví, je už všechna přeměněná, je v ní polohová energie E_p rovna původní kinetické E_k. Veličiny popisující Martinův pohyb nebo jeho planetu budeme nadále označovat číslem 1, pro Marťana použijeme číslo 2.

Jak spočítat polohovou energii? Vzorec $E_p = mgh$ platí pouze pro povrch zemský, musíme si tedy odvodit vzorec obecnější, který bude záviset na parametrech planety a budeme ho moci použít i pro Marťanovu planetu. Při zhoupnutí směrem dolů koná gravitační síla práci a Martina/Marťana urychluje. Tato síla působí v Martinově případě po dráze $s_1 = h$ a v Marťanově po dráze $s_2 = 2h$. Vykonanou práci W spočteme jako

$$W = Fs$$

Polohová energie v bodě zastavení houpačky bude tedy rovna (po dosazení vzorce za gravitační sílu)

$$E_{p1} = F_{g1}h = \kappa\frac{mM_1}{R_1^2}h,$$

$$E_{p2} = F_{g2}2h = \kappa\frac{mM_2}{R_2^2}2h,$$

kde M je hmotnost planety a R je její poloměr. Předpokládáme, že Martinova hmotnost je zanedbatelná vůči hmotnosti planety a proto s ní nebude nijak škubat (přeměňovat Martinovu kinetickou energii na kinetickou energii planety) a také předpokládáme, že houpačka je malá vůči poloměru planety, takže do vzorce pro gravitační sílu $F_g = \kappa\frac{mM}{r^2}$ za vzájemnou vzdálenost těles r můžeme dosadit rovnou poloměr planety, i když se při houpání vzdálenost Martina a planety nepatrně mění. Tyto dvě energie se musejí rovnat, neboť jsou obě jen beze zbytku přeměněná kinetická energie E_k, jež je pro oba případy stejná.

$$\kappa\frac{mM_1}{R_1^2}h = \kappa\frac{mM_2}{R_2^2}2h$$

Po vykrácení m, κ, h dostaneme

$$\frac{M_1}{R_1^2} = \frac{M_2}{R_2^2}2,$$

z čehož vyjádříme poměr hmotností planet

$$\frac{M_1}{M_2} = 2\frac{R_1^2}{R_2^2}.$$

Budou-li obě planety stejně velké, Martinova planeta musí být dvakrát hmotnější.

Tereza Zábojníková
terka@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.